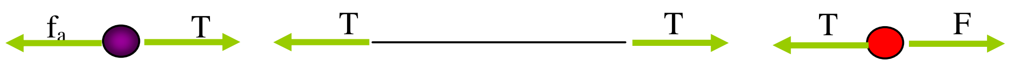
Esercizi di dinamica 2

1) Un corpo di massa m=1.0 kg si trova su un piano orizzontale scabro. Il coefficiente di attrito statico tra corpo e piano è μ_s=0.8. Il corpo è sottoposto all'azione di una forza orizzontale F_1= 7.0 N ed è in quiete. a) quanto vale la forza di attrito statico? Quanto vale la forza di trazione massima che si può esercitare sul corpo senza che esso si metta in moto?
$ma = F_1 - f_a = 0 \qquad f_a = F_1 = 7N \qquad F_{max} = f_{max} = \mu_s mg = 7.84N$

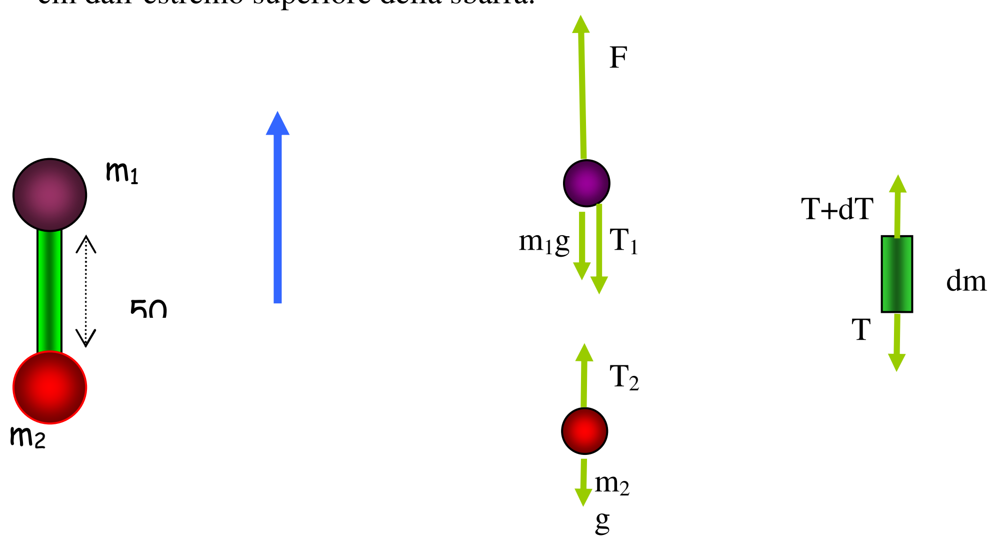
2) Un uomo trascina tramite una fune orizzontale una cassa di massa M=50 kg. La superficie su cui si muove la cassa ha coefficiente di attrito dinamico μ_d=0.5. a) che forza deve esercitare l'uomo sulla fune per muovere la cassa con velocità costante? b) che forza esercita la fune sull'uomo? c) che forza esercita la cassa sulla fune ? d) che forza esercita la fune sulla cassa. Ad un certo istante la cassa passa in una zona in cui il coefficiente di attrito vale μ_d=0.30. L'uomo continua a trascinare la cassa con la stessa forza. e) qual è l'accelerazione che acquista la cassa? f) qual è la forza di reazione della fune alla forza esercitata dall'uomo?
diagramma delle forze:



a) $Ma = T - f_a = 0 \qquad |T| = |F| = \mu_d Mg = 245N$

b) $Ma = T - f'_a = \mu_d Mg - \mu'_d Mg = (\mu_d - \mu'_d)Mg \qquad a = (\mu_d - \mu'_d)g = 1.96 m/s^2$

3) Due sfere di massa m_1=10.0 kg e m_2= 8.0 kg sono connesse da una sbarra omogenea , di sezione costante , di massa M=20.0 kg e lunghezza L=50 cm. Se si applica una forza F=400 N, come in figura, il sistema accelera verso l'alto. quanto vale la tensione nella sbarra :a)in cima alla sbarra, in fondo alla sbarra, c) a metà della sbarra., d) in un punto che dista d=20 cm dall'estremo superiore della sbarra.



I due corpi e la sbarra sono collegati rigidamente per cui si muovono con la stessa accelerazione.

$$m_1 a = F - T_1 - m_1 g$$
$$m_2 a = T_2 - m_2 g$$
$$(m_1 + m_2 + m)a = F - (m_1 + m_2 + m)g \qquad a = 0.73\, m/s^2$$

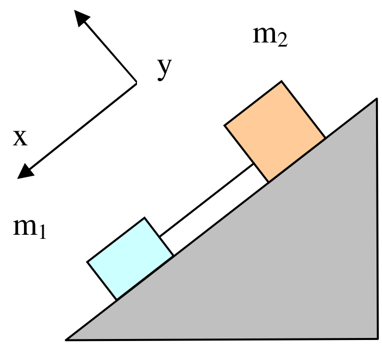
Per un elemento *dm* di massa della sbarra si ha:

$$a \cdot dm = dT - g \cdot dm \qquad dm = \rho \cdot dl = \frac{m}{L} dl \qquad (a+g)dm = dT$$

$$\int_{T_2}^{T_1} dT = \int_o^L (a+g)dm = \int_0^L (a+g)\rho \cdot dl \qquad T_1 - T_2 = (a+g)\rho L = m(a+g)$$

Per calcolare la tensione nella sbarra in un qualsiasi punto che disti una quantità data da un estremo, basta tenerne conto nel calcolo degli estremi dell'integrale.

4) Due blocchi di massa m_1=2.0 kg e m_2= 4.0 kg sono connessi da una fune in estensibile e di massa trascurabile. I due blocchi possono muoversi solidalmente su un piano inclinato di 37° rispetto all'orizzontale, scabro. Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo m_1 e il piano vale μ_d=0.30 mentre quello tra m_2 e il piano vale μ_d=0.50. Si calcolino l'accelerazione dei blocchi e la tensione del filo.



a= 2.52 m/s^2 T= 2.09 N

Equazione del moto del corpo 1:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{1att} + \vec{N}_1 \qquad \begin{cases} m_1 a_{1x} = m_1 g sen\alpha - N_1\mu_1 - T \\ m_1 a_{1y} = -m_1 g \cos\alpha + N_1 = 0 \end{cases}$$

Equazione del moto del corpo 2:

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} - \vec{T} + \vec{F}_{2att} + \vec{N}_2 \qquad \begin{cases} m_2 a_{2x} = m_2 g sen\alpha - N_2\mu_2 + T \\ m_2 a_{2y} = -m_2 g \cos\alpha + N_2 = 0 \end{cases}$$

La tensione del filo è la forza che fa sì che i due corpi sentano uno la presenza dell'altro. E' una forzadi azione e reazione, per cui, se convenzionalmente viene dato il segno + al vettore T per il corpo 1, esso avrà segno – per il corpo 2. Con la scelta dell'orientazione degli assi che si è fatta, segno + indica una forza diretta verso il basso. Ci si aspetta, quindi, che la tensione abbia segno – per il corpo 1 e segno + per il corpo 2. Se i due corpi si muovono in modo solidale, le loro accelerazioni coincidono, per cui, chiamando *a* l'accelerazione comune si ottiene:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g(sen\alpha - \mu_1 \cos\alpha) - T \\ m_2 a = m_2 g(sen\alpha - \mu_2 \cos\alpha) + T \end{cases} \qquad a = g\left(sen\alpha - \cos\alpha \frac{m_1\mu_1 + m_2\mu_2}{m_1 + m_2}\right) = 2.52\, m/s^2$$

$$T = m_1 m_2 g \cos\alpha \frac{\mu_2 - \mu_1}{m_1 + m_2} = -2.087 N$$

5) Quando un corpo di massa m=0.20 kg viene attaccato ad una molla ideale posta in posizione verticale, la molla si allunga di 2 cm rispetto alla sua lunghezza a riposo che è di 4 cm. Il corpo e la molla vengono posti su un piano orizzontale liscio e posti in rotazione con ω=2 giri/s attorno ad un estremo fisso della molla.

Di quanto si allunga la molla? Δl= 1.9 cm

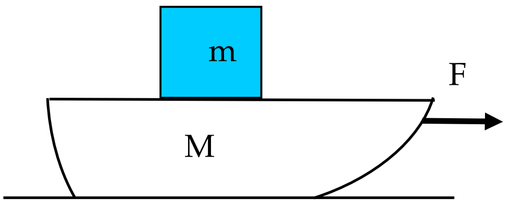
Equilibrio delle forze sul corpo:

$0 = mg - K\delta x \quad \Rightarrow \quad K = \dfrac{mg}{\delta x} = 98\,N/m$

Quando la molla viene posta in rotazione (con velocità angolare costante) sul piano orizzontale, la forza risultante sul corpo dà l'accelerazione centripeta necessaria a svolgere il moto, questa forza è la forza elastica:

$$ma_N = m\omega^2(l + \delta x') = K\delta x' \qquad \delta x' = \frac{m\omega^2 l}{K - m\omega^2} = 0.019m = 1.9cm$$

6)



Su una slitta di massa M=35 kg, scorrevole senza attrito apprezzabile su un piano orizzontale e inizialmente ferma, è posato un blocco di massa m=70 kg. I coefficienti di attrito statico e dinamico tra blocco e slitta sono: μ_s=0.40 e μ_d=0.33.

a-Si calcoli il massimo valore della forza *F* che si può applicare alla slitta senza che il blocco scivoli rispetto alla slitta stessa.

Alla slitta viene applicata, per un tempo Δt=0.5 s una forza orizzontale costante di modulo F=500 N. Si calcolino, rispetto ad un sistema di riferimento inerziale,

b-l'accelerazione della slitta, c-l'accelerazione del blocco

F_{max} = 412 N a_{slitta} = 5.53 m/s^2 a_{blocco} = 3.23 m/s^2

Se il blocco non scivola l'attrito statico é $f \le \mu_s mg$ e la sua accelerazione $a = \dfrac{f}{m}$ è uguale a quella dell'intero sistema $a = \dfrac{F}{(M+m)}$ da cui:

$$F \le (M+m)\mu_s g = 412\text{ N}(411.6\text{ N}) \quad \Rightarrow F_{max} = 412\text{ N}$$

Sulla slitta agiscono in versi opposti la forza F e l'attrito dinamico $f_d = \mu_d mg$ (poichè $F > F_{max}$). Quindi la sua equazione del moto è:

$$F - \mu_d mg = Ma \quad \text{da cui} \Rightarrow a_s = 5.53\,ms^{-2}$$

Sul blocco agisce solo la forza di attrito dinamico, per cui

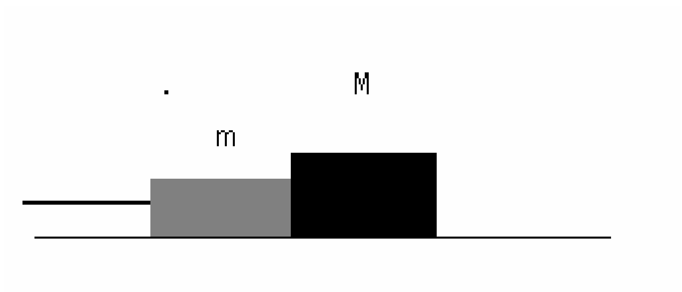
$$a_b = \mu_d g = 3.23\ ms^{-2}$$

Nel tempo Δt la slitta percorre una distanza $x_s = \dfrac{1}{2}a_s(\Delta t^2) = 0.69\,m.$

7) Due blocchi adiacenti, posati su una superficie orizzontale, sono accelerati da una forza F=12 N, applicata ad uno dei due (vedi figura). m=1 kg e M=3 kg, mentre le due forze di attrito valgono f_m=2 N e f_M=4 N, rispettivamente.

1. Quanto vale l'accelerazione del sistema ?   a= 1.5 m/s^2

2. Qual è l'intensità della forza esercitata dal primo blocco sul secondo? F_1 = 8.5 N
3. Se la stessa forza F viene , invece, applicata al corpo di massa M, quanto vale la forza che il secondo blocco esercita sul primo? F_2= 3.5 N



Supponendo che la forza sia applicata ad m , che il verso positivo dell'asse di riferimento sia verso destra e chiamando F_m la forza che il blocco M esercita sul blocco m (uguale ed opposta a quella che m esercita su M) si ha:

$$\begin{cases} ma = F - f_m - F_m \\ Ma = F_m - f_M \end{cases}$$

$$F_m = \frac{F - f_m + \frac{m}{M} f_M}{\frac{m}{M} + 1} = 8.5N \Rightarrow a = 1.5m/s^2$$

oppure:

$$(m+M)a = F - f_m - f_M \Rightarrow a = \frac{F - f_m - f_M}{m+M} = 1.5m/s^2$$

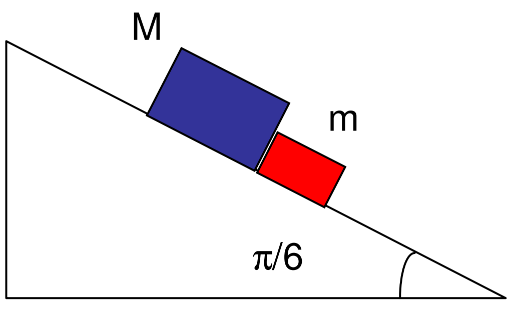
$$Ma = F_m - f_M \Rightarrow F_m = Ma + f_M = 8.5N$$

Se la forza, diretta ora in senso opposto, è applicata ad M, le equazioni del moto diventano:

$$(m+M)a = F - f_m - f_M \Rightarrow a = \frac{F - f_m - f_M}{m+M} = 1.5m/s^2$$

$$ma = F_M - f_m \Rightarrow F_M = ma + f_m = 3.5N$$

8) Due blocchi di massa M=3kg e m=1 kg, sono posti, come in figura, su un piano obliquo scabro, inclinato di $\theta=\pi/6$ rispetto all'orizzontale. I coefficienti di attrito tra i due corpi e il piano sono, rispettivamente $\mu_m=0.2$ e $\mu_M=0.14$. (per ambedue i corpi il coefficiente di attrito statico è uguale a quello di attrito dinamico).



Si determinino:
- l'accelerazione del sistema a= $3.58\ m/s^2$
-il modulo della reazione vincolare che si esplica tra i due corpi R= 0.38 N
- la forza necessaria a mantenere in equilibrio statico il sistema F= 14.32 N

L'equazione del moto dei due corpi lungo il piano inclinato, presi singolarmente, considera la forza peso, la reazione di contatto tra i due corpi e la forza di attrito. Se si considera il moto del sistema nel suo complesso la reazione di contatto, che è una forza interna, non entra a determinare il moto:

$$\begin{cases} Ma_M = Mg\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - R - \mu_M Mg\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ ma_m = mg\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + R - \mu_m mg\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ a_M = a_m = a \end{cases} \Rightarrow (m+M)a = (m+M)g\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - (\mu_m m + \mu_M M)g\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$(m+M)a = (m+M)g\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - (\mu_m m + \mu_M M)g\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$a = g\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{(\mu_m m + \mu_M M)}{(m+M)} g\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3.58(45)\,m/s^2$$

$$R = M\left(g\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - a\right) - \mu_M Mg\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.38N$$

Impostando l'equilibrio delle forze che agiscono sul sistema si ottiene:

$$0 = (m+M)a = (m+M)g\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - (\mu_m m + \mu_M M)g\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + F$$

$$F = (\mu_m m + \mu_M M)g\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - (m+M)g\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 14.32N$$

9) Una massa m=0.25 kg si muove su un piano orizzontale scabro (μ_d=0.12) con velocità v_0=5.0 m/s parallela al piano. Al tempo t=0 s inizia ad agire su m una forza verticale, dipendente dal tempo, F=qt con q=5.0 N/s. Questa forza preme m verso piano. Si calcolino:

- il tempo impiegato dalla massa m per fermarsi t=1.61 s
- la distanza percorsa dalla massa dall'istante iniziale al momento dell'arresto x= 4.86 m
- modulo , direzione e verso dell'impulso totale subito dalla massa m dal momento in cui inizia a subire la forza a quello in cui si ferma. J= -1.25 Ns

Equazione del moto del punto materiale

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{f}_{att} \qquad \begin{cases} ma_x = f_{att} = -\mu_d N \\ ma_y = -mg + N - F \end{cases} \qquad N = mg + F$$

L'accelerazione lungo x non è costante ma data da:

$$a_x = -\frac{\mu_d N}{m} = -\frac{\mu_d}{m}(mg + qt)$$

$$v = v_0 + \int_0^t a(t)dt = v_0 - \mu_d \int_0^t \left(g + \frac{q}{m}t\right)dt \qquad v = v_0 - \mu_d gt - \frac{\mu_d q}{2m}t^2$$

Il corpo si ferma quando la sua velocità è uguale a zero, quindi all'istante t dato da:

$$\frac{\mu_d q}{2m}t^2 + \mu_d gt - v_0 = 0 \qquad t = 1.61s$$

In questo istante lo spazio percorso è:

$$x=\int_0^t v(t)dt=\int_0^t\left(v_0-\mu_d\left(g+\frac{q}{m}t\right)\right)dt=v_0t-\frac{\mu_d g}{2}t^2-\frac{\mu_d q}{6m}t^3=4.86m$$

Teorema dell'impulso:

$$\vec{I}=\Delta\vec{p}=m\vec{v}_{fin}-m\vec{v}_0 \qquad I=-mv_0=-1.25Ns$$

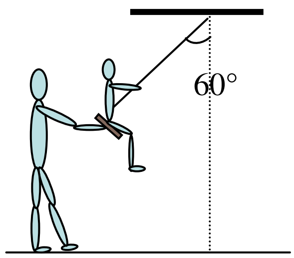
10) Un bimbo di massa **m=15 kg** è inizialmente tenuto in equilibrio su un'altalena dal padre. Le funi dell'altalena, lunghe **l=2.5 m**, formano un angolo di 60º con la verticale. Si possono considerare trascurabili le masse dell'altalena, delle funi, le dimensioni del bimbo e gli attriti.
Si determinino:

a- la forza esercitata dal padre F_p= 254.6 N

b- la tensione delle funi T= 294 N

c- la tensione delle funi immediatamente dopo che il padre ha rilasciato il sedile T_1= 73.5N

d-la tensione massima



Equilibrio delle forze:

$$m\overline{g}+\overline{T}+\overline{F_P}=0$$

$$\begin{cases}-mg+T\cos\theta=0\\ -F_P+T sen\theta=0\end{cases} \quad F_P=mg\cdot tg\theta=254.6N \quad T=\frac{mg}{\cos\theta}=294N$$

Nel momento in cui il padre lascia l'altalena le uniche forze agenti sono la forza peso e la tensione:

$$T_1=mg\cdot cos\theta=73.5N$$

Durante il moto dell'altalena la tensione viene espressa dalla formula:

$$T-mg\cdot\cos\alpha=\frac{mv^2}{l} \quad \left(-60^\circ\le\alpha\le 60^\circ\right)$$

$$T=mg\cdot\cos\alpha+\frac{mv^2}{l}$$

La tensione è massima quando la velocità è massima e il coseno vale 1, cioè sulla verticale.

11) Un punto materiale di massa m=0.2 kg si trova su un piano orizzontale liscio. Esso può ruotare attorno ad un punto O cui è connesso da un filo inestensibile e di massa trascurabile, di lunghezza l=0.16 m. Inizialmente il filo è teso e il punto ha velocità v_0=0.19 m/s. Sul punto agisce una forza F=0.5 N, costantemente tangente alla traiettoria circolare ed equiversa alla direzione del moto. Il filo ha carico di rottura T_{max}=9.2 N.
Si determinino:

- la tensione iniziale del filo, T=0.045 N
- il modulo dell'accelerazione del punto materiale dopo che esso ha percorso mezzo giro,

$a = 16.13\ m/s^2$

- dopo quanto tempo dall'istante iniziale il filo si rompe. $t = 1\ s$

La seconda legge di Newton per il punto materiale si scrive:

$$\vec{F}_{tot} = m\vec{a} = \vec{T} + \vec{F}$$

dove le due forze sono la tensione del filo (sempre normale alla traiettoria) e la forza F (sempre tangente alla traiettoria.

All'istante iniziale la tensione del filo è data da:

$$T = \frac{mv_0^2}{l} = 0.045N$$

La forza F, tangente alla traiettoria, genera l'accelerazione tangenziale del moto, che è costante, per cui:

$$a_T = \frac{F}{m} = 2.5m/s^2 \qquad s = \pi l \qquad \pi l = v_0 t + \frac{1}{2} a_T t^2 \Rightarrow \begin{matrix} t = 0.563s \\ t = -0.715s \end{matrix}$$

La soluzione negativa si scarta perchè non ha significato fisico.

$$v = v_o + a_T t \quad \Rightarrow \quad v = 1.597m/s \approx 1.6m/s \quad \Rightarrow \quad a_N = \frac{v^2}{l} = 15.94m/s^2$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = 16.13m/s^2$$

Il filo si rompe quando la tensione (forza centripeta) raggiunge il carico di rottura:

$$T_{max} = \frac{mv^2}{l} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{T_{max} l}{m} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{T_{max} l}{m}} = 2.713m/s$$

$$v = v_0 + a_T t' \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{v - v_0}{a_T} = 1.009s \approx 1.0s$$