ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE ED INFINITESIMALE

P. Ronchese

Algebra vettoriale

Alcune grandezze fisiche possono essere descritte mediante semplici numeri (e, nella maggior parte dei casi, una unità di misura che costituisce argomento a sè), tali grandezze si chiamano “scalari”. Molte altre grandezze, invece, necessitano per la loro descrizione di oggetti matematici piú complessi chiamati “vettori”, e per questo si chiamano grandezze vettoriali.

I vettori sono oggetti caratterizzati, nella loro definizione, da

- un modulo
- una direzione
- un verso

e vengono indicati nelle formule con una freccia al di sopra del simbolo che li indica: $\vec{v}$; in alcuni testi viene usata una diversa notazione e il carattere vettoriale viene contrassegnato con la stampa in grassetto: $\boldsymbol{v}$.

Sui vettori si possono eseguire varie operazioni, la piú semplice è la moltiplicazione per uno scalare (cioè un numero) : il risultato dell'operazione è un vettore con la stessa direzione e modulo pari al modulo del vettore di partenza moltiplicato per il modulo del numero; il verso rimane invariato se il numero è positivo e diventa l'opposto se il numero è negativo.

Una operazione quasi altrettanto semplice è la somma di due vettori, ottenuta traslando uno dei due vettori in modo che la sua origine coincida con l'estremità dell'altro vettore; il risultato è dato dal vettore la cui origine coincide con l'origine del primo vettore e l'estremità coincide con l'estremità del secondo. Tale operazione è ovviamente commutativa e quindi $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

Esistono poi altre due operazioni tra vettori, chiamate entrambe prodotto. La prima dà come risultato uno scalare e di conseguenza viene chiamata “prodotto scalare”; l'operazione viene indicata con un punto ed il risultato è definito come **il prodotto del modulo di un vettore per la proiezione del secondo sul primo**:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|b_a=|\vec{b}|a_b$$

Si può facilmente verificare come sia del tutto inessenziale quale dei due vettori venga proiettato sull'altro; valgono infatti le relazioni

$$a_b=|\vec{a}|\cos\theta \qquad ; \qquad b_a=|\vec{b}|\cos\theta$$

che, sostituite nella relazione precedente, danno il seguente risultato:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

Il prodotto scalare è quindi definito anche come prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo compreso tra i due, ed è chiamata anche “prodotto interno”. Come la somma anche il prodotto scalare è, per quanto detto, commutativo. Tale operazione viene utilizzata, per es., nella descrizione del lavoro fatto da una forza.

Il "prodotto vettoriale" invece, come dice la parola stessa, è una operazione che dà come risultato un vettore, perpendicolare al piano contenente i due vettori di partenza e di modulo pari al **prodotto del modulo di un vettore per la componente del secondo ortogonale al primo**. Il verso è tale per cui, guardando il piano dei vettori di partenza dall'estremità del vettore risultante, la rotazione dal primo al secondo risulta antioraria. Poiché il vettore risultante esce dal piano dei due vettori di partenza tale operazione viene chiamata anche "prodotto esterno", il simbolo usato per indicarla è costituito da una croce obliqua o da una "v" rovesciata:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \equiv \vec{a} \times \vec{b}$$

Poiché la componente di $\vec{a}$ ortogonale a $\vec{b}$ è pari a $|\vec{a}| \operatorname{sen} \theta$ il modulo del prodotto vettoriale risulta pari al prodotto dei moduli dei due vettori per il seno dell'angolo compreso:

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \operatorname{sen} \theta$$

Il modulo del prodotto vettoriale non dipende quindi dall'ordine dei fattori; il verso del risultato dipende però dal verso della rotazione con cui il primo vettore può essere sovrapposto al secondo. L'operazione complessiva **non è quindi commutativa**, ma vale la relazione

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

Tale operazione viene utilizzata nella descrizione dei moti rotatori e dei fenomeni magnetici.

Un vettore è dunque un oggetto piú complesso di un numero; è però necessario, per descrivere dei particolari vettori e per determinare il risultato delle operazioni tra essi, esprimerli in termini numerici. I modi possibili per ottenere questo sono ovviamente molteplici, per esempio si può descrivere un vettore con il suo modulo e con gli angoli che esso forma con alcune direzioni prese come riferimento. Ogni descrizione può risultare piú o meno utile in diverse situazioni; quella di uso piú comune è la seguente: ogni vettore può essere espresso come somma di 3 vettori paralleli a 3 assi scelti come riferimento; ciascuno di tali vettori è quindi identificato dal modulo e dal verso, essendo fissata a questo punto la direzione. A ciascuno di essi può quindi essere associato un numero pari al modulo, eventualmente cambiato di segno se il verso è opposto a un verso scelto come positivo per il rispettivo asse, sicché **i 3 numeri cosí ottenuti identificano in modo univoco il vettore** in oggetto, una volta fissato il sistema di riferimento. Tali numeri prendono il nome di **"coordinate cartesiane"**, e vengono indicate per un vettore $\vec{v}$ con i simboli v_x , v_y e v_z .

Ogni vettore può quindi essere espresso nella forma:

$$\vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z$$

dove $\vec{u}_{x,y,z}$ sono tre vettori di modulo unitario, con direzione e verso concordi con gli assi cartesiani e chiamati quindi **versori**.

Tale espressione può essere sostituita nelle relazioni che definiscono le operazioni con vettori, ottenendone quindi delle espressioni mediante le coordinate cartesiane.

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ed uno scalare s si trova, scomponendo i vettori e raccogliendo, nella somma, i fattori comuni:

- Prodotto di uno scalare per un vettore:
  $(s\vec{a})_x = sa_x$
  $(s\vec{a})_y = sa_y$
  $(s\vec{a})_z = sa_z$

- Somma di due vettori:
  $(\vec{a}+\vec{b})_x = a_x + b_x$
  $(\vec{a}+\vec{b})_y = a_y + b_y$
  $(\vec{a}+\vec{b})_z = a_z + b_z$

Per i prodotti è necessario determinare innanzitutto i prodotti dei versori:

$$\begin{array}{ccccc}
\vec{u_x} \cdot \vec{u_x} = 1 & ; & \vec{u_x} \cdot \vec{u_y} = 0 & ; & \vec{u_x} \cdot \vec{u_z} = 0 \\
\vec{u_y} \cdot \vec{u_x} = 0 & ; & \vec{u_y} \cdot \vec{u_y} = 1 & ; & \vec{u_y} \cdot \vec{u_z} = 0 \\
\vec{u_z} \cdot \vec{u_x} = 0 & ; & \vec{u_z} \cdot \vec{u_y} = 0 & ; & \vec{u_z} \cdot \vec{u_z} = 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
\vec{u_x} \wedge \vec{u_x} = & 0 & ; & \vec{u_x} \wedge \vec{u_y} = & u_z & ; & \vec{u_x} \wedge \vec{u_z} = & -u_y \\
\vec{u_y} \wedge \vec{u_x} = & -u_z & ; & \vec{u_y} \wedge \vec{u_y} = & 0 & ; & \vec{u_y} \wedge \vec{u_z} = & u_x \\
\vec{u_z} \wedge \vec{u_x} = & u_y & ; & \vec{u_z} \wedge \vec{u_y} = & -u_x & ; & \vec{u_z} \wedge \vec{u_z} = & 0
\end{array}$$

Da essi è possibile, scomponendo i termini e sviluppando, determinare i prodotti di due vettori generici:

- Prodotto scalare (o interno) di due vettori:
  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

- Prodotto vettoriale (o esterno) di due vettori:
  $(\vec{a} \wedge \vec{b})_x = a_y b_z - a_z b_y$
  $(\vec{a} \wedge \vec{b})_y = a_z b_x - a_x b_z$
  $(\vec{a} \wedge \vec{b})_z = a_x b_y - a_y b_x$

Calcolo infinitesimale

Nella descrizione della maggior parte dei fenomeni fisici ci si trova a dover trattare grandezze che non sono costanti ma dipendono da altre grandezze, come il tempo o la posizione nello spazio. Ciò rende necessario studiare i fenomeni osservando il loro svolgimento in intervalli di tempo che tendono ad annullarsi (“infinitesimi”) in modo da poter trascurare le variazioni subite in essi dalle grandezze in esame. Per fare questo è innanzitutto necessario esprimere la dipendenza delle grandezze fisiche da altre in modo matematico; l'oggetto matematico che correla tra loro due grandezze x e y prende il nome di "funzione" e si indica con il simbolo $y = f(x)$. Nella definizione di funzione viene richiesto che ad ogni valore di x (chiamato argomento) corrisponda un solo risultato y ; non esiste nessuna richiesta per l'inverso, quindi possono esistere piú valori di x , diversi tra loro, ai quali corrisponde un unico risultato.

Nella descrizione dei fenomeni fisici riveste particolare importanza **la variazione del risultato in corrispondenza ad una certa variazione dell'argomento**; ovviamente la variazione del risultato dipende anche dall'argomento iniziale e non solo dalla sua variazione. Ciò che risulta di particolare importanza è il **rapporto tra le due variazioni**,

$$f'(x,d) = \frac{f(x+d) - f(x)}{(x+d) - x}$$

dove d è la variazione dell'argomento, e il valore che esso assume **per d che tende a** 0 . Il risultato dell'operazione è la derivata della funzione nel punto x , indicata con il simbolo $f'(x)$. Un altro simbolo per questa operazione, molto usato in fisica, è df/dx ; esso risulta particolarmente significativo in quanto rende esplicito il significato di **rapporto tra variazione della funzione e variazione dell'argomento**.

La definizione stessa di derivata implica il suo possibile uso nel calcolo approssimato di una funzione a partire dal valore che la funzione ha in un certo punto x_0 :

$$f(x) \simeq f(x_0) + \frac{df}{dx}(x - x_0)$$

scritta anche nella forma:

$$f(x + dx) \simeq f(x) + f'(x)dx$$

L'esempio piú immediato di applicazione del concetto di derivata è la velocità: la velocità media di un punto è data dal rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo; nei casi in cui la velocità non è costante la velocità istantanea è data dallo stesso rapporto per intervalli di tempo infinitesimi, e corrisponde quindi alla derivata dello spazio funzione del tempo. Tale esempio porta anche ad un altro problema, opposto al primo: lo spazio percorso da un punto in un certo tempo è pari al prodotto della velocità per il tempo, se la velocità è costante, ma non può essere determinato in modo semplice se la velocità varia durante il moto. Per trovare lo spazio bisogna allora dividere il tempo in molti intervalli, in modo da trascurare le variazioni di velocità all'interno di ciascun intervallo, e determinare lo spazio percorso facendo la somma dei singoli spazi che risultano pari a $\Delta s = v(t)\Delta t$, dove la lettera greca Δ indica gli intervalli di spazio o tempo. Il risultato esatto si ottiene dividendo il tempo in **un numero che tende all'infinito di intervalli di ampiezza che tende ad annullarsi**; tale operazione, indicata con una grande lettera "S" che sta per "somma"

$$\int_{t_i}^{t_f} v(t)dt$$

è l'integrale definito della funzione $v(t)$ tra gli istanti iniziale e finale t_i e t_f . La notazione indica come l'operazione consista nel **moltiplicare la funzione per intervalli infinitesimi** (rappresentati per questo con dt anziché Δt), ed eseguire la **somma** dei prodotti. Il concetto di **somma di infiniti termini infinitesimi** è infatti quello piú importante nelle applicazioni fisiche del calcolo integrale.

Vettori e calcolo infinitesimale

Nel calcolo vettoriale risultano di uso frequente alcune operazioni che permettono di ottenere funzioni vettoriali a partire da funzioni scalari (o viceversa) o da altre funzioni vettoriali mediante opportune combinazioni di operazioni di derivazione. Nella definizione e nell'uso di tali operazioni si ricorre molto spesso all'espressione dei prodotti scalare e vettoriale mediante le coordinate cartesiane, trovati precedentemente:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad ; \quad \vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

Con esse risulta possibile esprimere alcuni integrali di percorso, di superficie o di volume in termini di integrali di altro tipo, o come differenza di funzioni scalari.

Integrali

L'**integrale di percorso**, o di linea, della funzione $f(x, y, z)$ lungo Γ è indicato con il simbolo

$$\int_\Gamma f(x, y, z) ds$$

e si ottiene:

- **dividendo il percorso** Γ tra i punti (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) in **infiniti tratti infinitesimi** di lunghezza ds ,
- **moltiplicando** la lunghezza di ciascun tratto per il valore della funzione calcolata nel corrispondente punto dello spazio
- **sommando** i prodotti cosí ottenuti.

Del tutto analogo risulta l'integrale di percorso di una funzione vettoriale $\vec{F}(x, y, z)$ in cui per ogni tratto del percorso viene calcolato il prodotto scalare $\vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{s}$ dove il vettore $d\vec{s}$ ha modulo ds e direzione **tangente al percorso**; si può infatti scrivere:

$$\int_\Gamma \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{s} = \int_\Gamma \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{u}_T ds$$

Negli integrali di percorso di funzioni vettoriali è dunque rilevante la componente **parallela** al percorso.

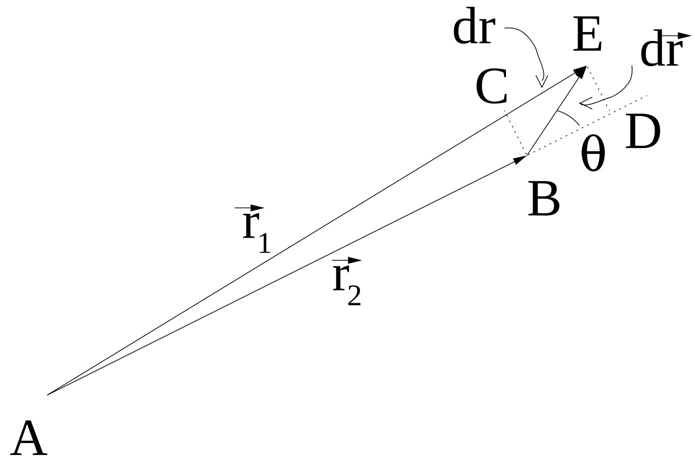
L'espressione ds in questo caso rappresenta il modulo del vettore infinitesimo $d\vec{s}$, è però importante notare come in genere il modulo del differenziale di un vettore **non** sia uguale al differenziale del modulo. Dati due vettori $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ la cui differenza, infinitesima, è $d\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ si ha:

$$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2 + d\vec{r}| \simeq |\vec{r}_2| + |d\vec{r}| \cos\theta$$

L'angolo θ è l'angolo tra $d\vec{r}$ e $\vec{r}$; la relazione è facilmente ricavabile osservando la figura:

$$|\vec{r}_1| = AE = AC + CE \simeq AB + BD = |\vec{r}_2| + |d\vec{r}| \cos\theta$$

Utilizzando viceversa il differenziale del modulo si ha



$$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| + d|\vec{r}|$$

e confrontando con la relazione precedente si osserva che

$$|d\vec{r}| \neq d|\vec{r}|$$

Quando in una espressione vettoriale infinitesima compare un modulo è quindi sempre importante distinguere tra "modulo del differenziale" e "differenziale del modulo".

Nel caso particolare di **percorsi chiusi**, in cui i punti di partenza ed arrivo coincidono, l'integrale di percorso di una funzione vettoriale prende il nome di **circuitazione** ed è talvolta indicata con il simbolo $C_\Gamma(\vec{F})$.

L'**integrale** della funzione $f(x, y, z)$ **sulla superficie** S è indicato con il simbolo

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma$$

e si ottiene:

- **dividendo la superficie** S **in infiniti elementi infinitesimi** di area $d\sigma$,
- **moltiplicando** l'area di ciascun elemento per il valore della funzione calcolata nel corrispondente punto dello spazio e
- **sommando** i prodotti cosí ottenuti.

Del tutto analogo risulta l'integrale di superficie di una funzione vettoriale $\vec{F}(x, y, z)$ in cui per ogni elemento della superficie viene calcolato il prodotto scalare $\vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{u}_N$ dove il versore $\vec{u}_N$ è orientato **ortogonalmente all'elemento di superficie**. Tale integrale viene anche chiamato **flusso** di $\vec{F}$ attraverso la superficie S e viene indicato con il simbolo $\Phi_S(\vec{F})$; talvolta per brevità viene utilizzato il simbolo $d\vec{\sigma}$ per indicare un vettore di modulo $d\sigma$ e parallelo a $\vec{u}_N$; si può allora scrivere:

$$\Phi_S(\vec{F}) = \int_S \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{\sigma} = \int_S \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{u}_N d\sigma$$

Negli integrali di superficie di funzioni vettoriali è dunque rilevante la componente **ortogonale** alla superficie.

L'**integrale** della funzione $f(x, y, z)$ **sul volume** V è indicato con il simbolo

$$\int_V f(x, y, z) d\tau$$

e si ottiene:

- **dividendo il volume** V **in infiniti elementi infinitesimi** $d\tau$,
- **moltiplicando** il volume di ciascun elemento per il valore della funzione calcolata nel corrispondente punto dello spazio e
- **sommando** i prodotti cosí ottenuti.

Nella formulazione delle leggi fisiche non è nella maggior parte dei casi necessario calcolare esplicitamente integrali di percorso, di superficie o di volume a partire dalle funzioni analitiche, ma è sufficiente poter esprimere alcuni di essi in termini di altri.

Gradiente

L'operazione piú semplice che connette scalari e vettori è il **gradiente**; data una funzione delle coordinate cartesiane $U(x, y, z)$ il gradiente di U in un punto è **dato dal vettore le cui componenti cartesiane sono pari alle derivate parziali di** U **rispetto a** x, y **e** z , ed è simboleggiato con una lettera greca Δ rovesciata:

$$\vec{\nabla} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

Dato uno spostamento infinitesimo $d\vec{s}$ nello spazio, la corrispondente variazione di U è data da:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \vec{\nabla} U \cdot d\vec{s}$$

e risulta quindi pari al prodotto scalare del gradiente di U per il vettore $d\vec{s}$.

Dividendo un percorso finito tra due punti x_1, y_1, z_1 e x_2, y_2, z_2 in infiniti tratti infinitesimi si trova quindi:

$$U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1) = \Delta U = \int_\Gamma dU = \int_\Gamma \vec{\nabla} U \cdot d\vec{s}$$

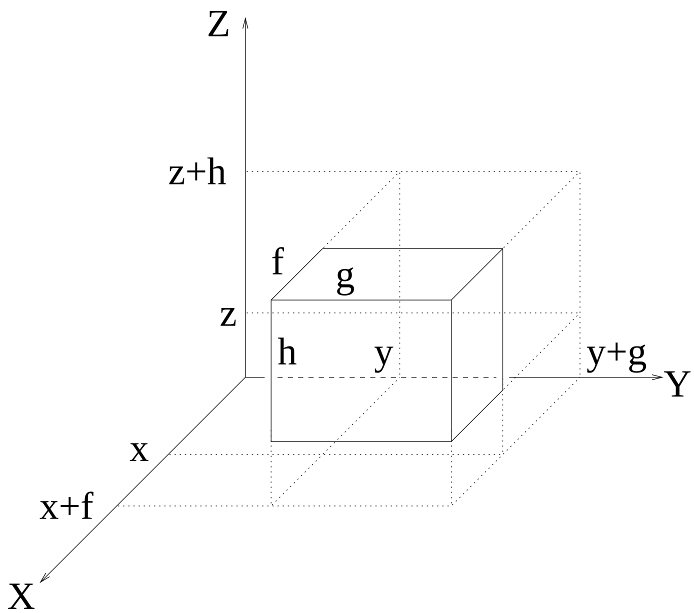
L'integrale di percorso del gradiente di U **è quindi pari alla differenza della funzione** U **calcolata nel punto finale e inziale del percorso**; ognuno degli infiniti termini è infatti pari a dU e la loro somma risulta pari a ΔU . Risulta peraltro chiaro che il risultato è lo stesso per qualsiasi percorso tra gli stessi punti iniziale e finale; la circuitazione di una funzione vettoriale esprimibile come gradiente di una funzione scalare è inoltre sempre nulla, poiché in un percorso chiuso i punti di partenza ed arrivo coincidono e si annulla la differenza della funzione U calcolata in essi. Ciò **non** è vero invece per funzioni vettoriali **non** esprimibili come gradiente di una funzione scalare: in tal caso l'integrale di percorso **non** è esprimibile come semplice differenza di una funzione calcolata nei punti iniziale e finale e l'integrale su una linea chiusa può **non** essere nullo.

Divergenza

La **divergenza** di una funzione vettoriale $\vec{F}(x, y, z)$ è **definita** come il limite, per il volume che tende a zero, del **flusso di $\vec{F}$ uscente da una superficie chiusa S diviso per il volume V** racchiuso dalla superficie stessa:

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \lim_{V \to 0} \frac{\Phi_S(\vec{F})}{V} = \lim_{V \to 0} \frac{\int_S \vec{F} \cdot \vec{u}_N d\sigma}{V}$$

Per esprimere la divergenza di una funzione vettoriale in coordinate cartesiane è opportuno considerare un volume infinitesimo a forma di parallelepipedo i cui lati, di lunghezza f, g e h , siano paralleli agli assi coordinati x, y e z , come mostrato in figura. Considerando le due facce ortogonali all'asse z , il flusso di un vettore $\vec{F}$ attraverso tali



facce è dato semplicemente dal prodotto della superficie fg per la componente z di $\vec{F}$; poiché inoltre il flusso risulta uscente per una faccia ed entrante per l'altra il contributo complessivo è dato dalla differenza:

$$\Phi_z(\vec{F}) = fgF_z(x, y, z+h) - fgF_z(x, y, z) = fg(F_z(x, y, z+h) - F_z(x, y, z))$$

che, per valori infinitesimi di h , può essere espresso mediante la derivata parziale di F_z rispetto a z :

$$\Phi_z(\vec{F}) = fg\frac{\partial F_z}{\partial z}h = \frac{\partial F_z}{\partial z}fgh$$

Il flusso uscente totale è dato dalla somma dei contributi corrispondenti alle tre coppie di facce ortogonali ai tre assi:

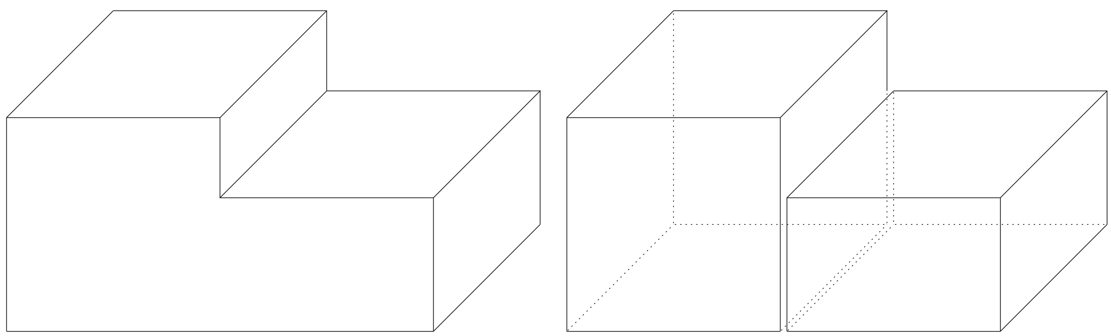
$$\Phi(\vec{F}) = \Phi_x(\vec{F}) + \Phi_y(\vec{F}) + \Phi_z(\vec{F}) = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) fgh$$

Poiché, infine, il volume del parallelepipedo è pari a $dV = fgh$ si ottiene, dividendo ambo i membri per il volume stesso, la divergenza di $\vec{F}$:

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \frac{\Phi(\vec{F})}{fgh} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

La divergenza di una funzione vettoriale viene spesso scritta usando il simbolo $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ per analogia con il prodotto scalare di due vettori; l'operazione $\vec{\nabla}$ è infatti costituita, in coordinate cartesiane, dalle tre derivate parziali rispetto a x, y e z che in questo caso vengono calcolate per le tre componenti F_x, F_y e F_z rispettivamente ed infine sommate. È importante notare che questa relazione è valida solo per le coordinate cartesiane e non per altri parametri (per es. angoli) che possano essere usati per definire un vettore.

Dato un volume finito esso può essere **diviso** in piú volumi come mostrato, per esempio, in figura; il flusso di un qualsiasi vettore attraverso la superficie di separazione risulta



allora entrante per uno dei due volumi ed uscente per l'altro. Sommando i flussi uscenti da entrambi i volumi il contributo di tale superficie compare di conseguenza una volta con il segno positivo ed una volta con segno negativo, e si annulla nella somma algebrica; eseguenendo una divisione in **infiniti volumi infinitesimi** il flusso totale uscente dal volume complessivo è dato allora dalla **somma** dei flussi uscenti da ciascuno dei volumi infinitesimi. Per ogni volume infinitesimo il flusso uscente è dato dal **prodotto** della divergenza per il volume stesso; il flusso totale, che è un integrale di superficie, è dunque esprimibile mediante un **integrale di volume** attraverso la relazione:

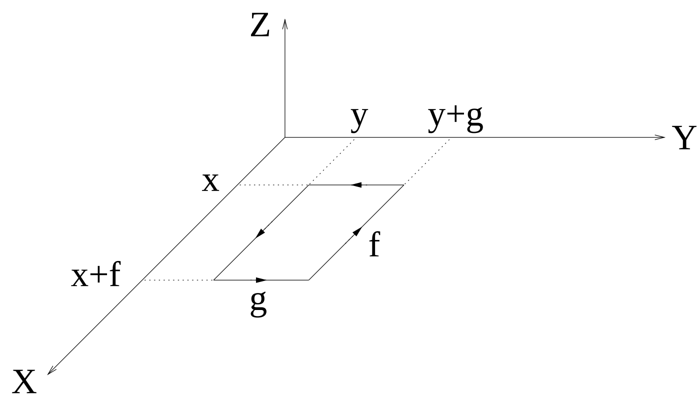
$$\Phi_S(\vec{F}) = \int_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \vec{u}_N d\sigma = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x,y,z) d\tau$$

Rotore

Il **rotore** di una funzione vettoriale $\vec{F}(x,y,z)$ è una grandezza vettoriale la cui componente parallela ad un qualsiasi versore $\vec{u}_N$ è definita come il limite, per la superficie che tende a zero, della **circuitazione di $\vec{F}$ lungo un percorso chiuso** Γ , disposto su un piano ortogonale a $\vec{u}_N$, **divisa per la superficie** S racchiusa dal percorso stesso:

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{F}) \cdot \vec{u}_N = \lim_{S \to 0} \frac{C_\Gamma(\vec{F})}{S} = \lim_{S \to 0} \frac{\int_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{u}_T ds}{S}$$

Per esprimere il rotore di una funzione vettoriale in coordinate cartesiane è opportuno considerare una superficie infinitesima rettangolare, ortogonale all'asse z , i cui lati, di lunghezza f e g , siano paralleli agli assi coordinati x e y , come mostrato in figura. Considerando i due segmenti paralleli all'asse y l'integrale di percorso di $\vec{F}$ lungo tali



segmenti è dato semplicemente dal prodotto della lunghezza g per la componente y di $\vec{F}$; poiché inoltre il verso di percorrenza risulta concorde con l'asse y per un lato e discorde per l'altro il contributo complessivo è dato dalla differenza:

$$\Gamma_{xy}(\vec{F}) = gF_y(x+f,y,z) - gF_y(x,y,z) = g(F_y(x+f,y,z) - F_y(x,y,z))$$

che, per valori infinitesimi di f , può essere espresso mediante la derivata parziale di F_y rispetto a x :

$$\Gamma_{xy}(\vec{F}) = g\frac{\partial F_y}{\partial x}f = \frac{\partial F_y}{\partial x}fg$$

Analogamente per i lati paralleli all'asse x si ha:

$$\Gamma_{yx}(\vec{F}) = fF_x(x,y,z) - fF_x(x,y+g,z) = -f\frac{\partial F_x}{\partial y}g = -\frac{\partial F_x}{\partial y}fg$$

La circuitazione è poi data dalla somma dei contributi corrispondenti alle due coppie di lati, mentre il prodotto fg è pari alla superficie del rettangolo:

$$\Gamma_z(\vec{F}) = \Gamma_{xy}(\vec{F}) + \Gamma_{yx}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)fg = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dS_z$$

Nel caso in cui il percorso stia sui piani ortogonali agli assi x o y la circuitazione risulta, seguendo lo stesso procedimento, esprimibile nella forma:

$$\Gamma_x(\vec{F}) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)dS_x$$

$$\Gamma_y(\vec{F}) = \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)dS_y$$

Per un percorso chiuso orientato in modo generico la circuitazione risulta pari alla somma di tre contributi, in ciascuno dei quali la superficie è pari alla proiezione della superficie effettiva su uno dei piani cartesiani. Per il piano ortogonale all'asse x la proiezione dS_x è pari al prodotto della superficie effettiva dS per la componente x del versore $\vec{u}_N$ ortogonale alla superficie stessa dS ; relazioni analoghe risultano valide per gli altri due piani. La circuitazione nel caso generico è quindi data dalla relazione:

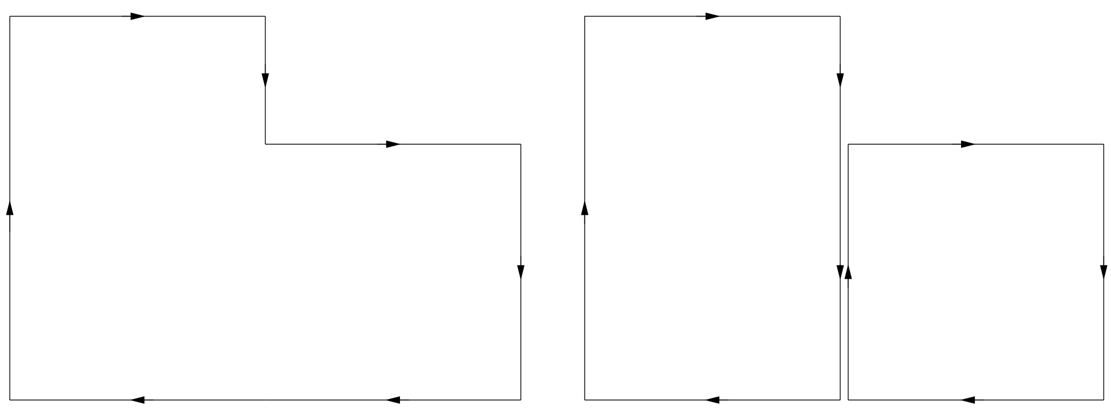
$$\Gamma(\vec{F}) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) u_{Nx} dS + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) u_{Ny} dS + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) u_{Nz} dS$$

Dividendo per la superficie si ottiene infine il rotore

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \, , \, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \, , \, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

che viene spesso scritto usando il simbolo $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ per analogia con il prodotto vettoriale.

Data una superficie finita essa può essere **divisa** in piú superfici come mostrato, per esempio, in figura; la linea di separazione appartiene allora ad entrambi i percorsi intorno



alle superfici, e viene percorsa in verso opposto nei due casi. Sommando le circuitazioni l'integrale di percorso di un qualsiasi vettore lungo tale linea risulta allora una volta positivo ed una volta negativo, e si annulla nella somma algebrica; eseguenendo una divisione in **infinite superfici infinitesime** la circuitazione lungo il percorso che racchiude la superficie complessiva è data allora dalla **somma** delle circuitazioni lungo ciascuno dei percorsi infinitesimi. Per ogni percorso infinitesimo la circuitazione è data dal **prodotto** della superficie per la componente del rotore ortogonale alla superficie stessa; la circuitazione totale, che è un integrale di percorso, è dunque esprimibile mediante un **integrale di superficie**, cioè un flusso, attraverso la relazione:

$$C_\Gamma(\vec{F}) = \int_\Gamma \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{s} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}(x,y,z)) \cdot \vec{u}_N d\sigma = \Phi_S(\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

nota come teorema di Stokes.