Laboratorio di FISICA 2

Misura della resistenza di un conduttore con il ponte di Wheatstone

Il **ponte di Wheatstone** è un circuito adatto alla misura della resistenza di un conduttore per confronto con resistenze note. Nello schema di Figura 1 la batteria $\mathcal{E}$ alimenta il circuito *ABCD* costituito da quattro resistenze R_1, R_2, R_3, R_4: R_1 la **resistenza incognita,** R_2 la resistenza nota, *campione*, R_3 e R_4 due resistenze variabili; tra i punti *B* e *D* viene inserito un **voltmetro digitale** (VD), come misuratore della differenza di potenziale[1] tra i due punti. Si variano i valori delle resistenze R_3 e R_4 finchè (VD) segnala una differenza di potenziale nulla $V_{B,D} = 0$. In questa situazione il **ponte è in equilibrio**.

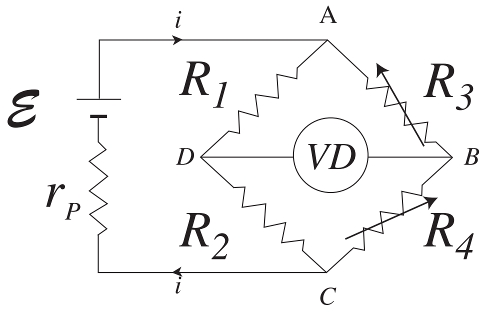

Figura 1

Con riferimento alla Figura 1, nell'ipotesi che il voltmetro digitale non sia inserito tra i punti *B* e *D*, detta r_P la resistenza del ramo in cui è inserita la pila di forza elettromotrice $\mathcal{E}$, la corrente i erogata dalla pila è data da:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r_P + R_{\text{eq}}} \qquad , \qquad R_{\text{eq}} = \frac{(R_1 + R_2)\cdot(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \tag{1}$$

La differenza di potenziale ai capi dei due rami ABC e ADC è:

$$V_{AC} = \mathcal{E} - r_P i = R_{\text{eq}} i = \frac{R_{\text{eq}}}{r_P + R_{\text{eq}}}\mathcal{E} \quad , \tag{2}$$

e la corrente che circola nei due rami risulta rispettivamente:

$$i_1 = \frac{V_{AC}}{R_1 + R_2} \qquad , \qquad i_2 = \frac{V_{AC}}{R_3 + R_4} \quad , \tag{3}$$

per cui

$$V_A - V_D = R_1 i_1 = R_1 \frac{V_{AC}}{R_1 + R_2} \qquad V_A - V_B = R_3 i_2 = R_3 \frac{V_{AC}}{R_3 + R_4}. \tag{4}$$

Se la resistenza del voltmetro digitale, $R_{VD} = 40.000\ \Omega$, risulta molto maggiore di quella delle altre resistenze presenti nel circuito, il suo inserimento non perturba apprezzabilmente il regime delle correnti nel circuito; in questa ipotesi la differenza di potenziale misurata dal voltmetro digitale dalla (4) risulta:

$$V_{BD} = V_D - V_B = V_{AC}\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4}\right). \tag{5}$$

[1] Nella versione originale (vedi paragrafo 5.10 del P. Mazzoldi, M. Nigro, e C.Voci Elettromagnetismo, EdiSES Napoli) tra i punti *B* è *D* è inserito un galvanometro, per cui il metodo è un po' diverso da quello classico. La scelta dell'utilizzo del voltmetro digitale è dettata dalla strumentazione in dotazione nella cassetta.

L'equilibrio del ponte è realizzato quando $V_{BD} = 0$, ovvero se:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \qquad (6)$$

Nello schema elettrico dell'esperimento da realizzare, riportato in figura 2, le resistenze R_3 e R_4 sono sostituite dal **reostato a filo** (di tipo *helipot*), R_6 della cassetta in dotazione, con i terminali B_{26} e B_{28} collegati ai punti A e C e il *cursore* corrispondente alla boccola B_{27} collegata al punto B. I valori delle resistenze R_3 e R_4 vengono in tal modo complementariamente variati da 0 fino al valore massimo $R_{\max} = 500\Omega$, ruotando il cursore del reostato montato sul pannello al disotto delle suddette boccole.

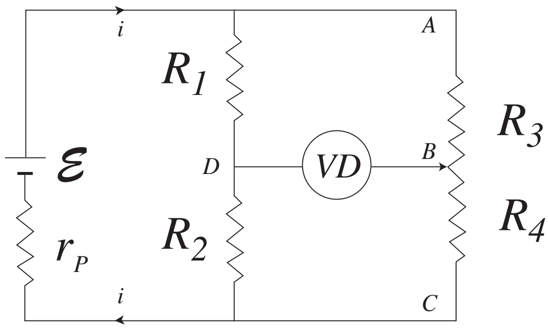

Figura 2

L'helipot può compiere 10 giri e per ciascun giro sono marcate 50 divisioni: assegnando alla divisione minima il valore ***n* = 2,** il reostato risulta suddiviso in 1000 parti a ciascuna delle quali corrisponde la resistenza **r=R$_{\max}$/1000 = 500 Ω/ 1000 = 0.5 Ω/divisione.**

In questo caso:

$$R_3 = rn \qquad , \qquad R_4 = r(1000 - n) \qquad (7)$$

sostituendo la (7) nella (5) si ottiene:

$$V_{BD} = V_{AC}\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{V_{AC}}{1000}n \quad , \qquad (8)$$

per cui $V_{B,D} = V$ varia linearmente con n:

$$V(n) = a + bn \qquad , \qquad (9)$$

con

$$a = V_{AC}\frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad , \qquad b = \frac{V_{AC}}{1000} \qquad ; \qquad (10)$$

la differenza di potenziale si annulla per il valore n_0 determinato dalla condizione:

$$R_1 = R_2 \frac{n_0}{1000 - n_0} \qquad . \qquad (11)$$

Dalla (11) risulta che il rapporto R_1 / R_2 non dipende dalla resistenza $R_{\max}$ del reostato. Scopo dell'esperienza di laboratorio è quello di esaminare la precisione ottenibile con questo metodo nella misura della resistenza incognita R_1 una volta che sia nota R_2. Dalla (11) si capisce che la precisione del metodo è determinata dalla precisione con cui si misura il valore $n_0 \pm \sigma_{n_0}$.

Come esporremo di seguito la procedura per la misura di n_0 è basata sulla determinazione della funzione $V(n)$ espressa dalle (9) e (10).

Realizzazione dell'esperienza

• Si realizza lo schema elettrico di figura 2 utilizzando la pila U_1 con i poli collegati alle boccole B_{24} e B_{25}. Premendo il tasto al di sotto delle suddette boccole si inserisce effettivamente la pila nel circuito.

• Si fissa un valore di n_i nell'intervallo $(50 \le n_i \le 950)$ e si legge il corrispondente valore di V_i misurato dal voltmetro. Si riportano i valori (n_i, V_i) nella tabella e sul foglio quadrettato predisposti per la relazione. In tabella in corrispondenza al valore di V_i si riporta l'errore di misura determinato dalla classe del voltmetro $\Delta V_i = classe \cdot V_i = \pm 0.7 \cdot 10^{-2} V_i$.

• Variando n a passi di 50, *mezzo giro dell'helipot*, si eseguono N misure. Il grafico dei punti sperimentali ottenuto, del tipo mostrato un figura 3, evidenzia la dipendenza lineare della funzione $V(n)$ data dalla (9). L'interpolazione grafica permette di dedurre il valore approssimato di n_0, rappresentato dall'ascissa in cui la retta interseca l'asse n. Gli errori sui valori V_i, sempre inferiori a 10 mV, non sono rappresentabili sul grafico, per cui non risulta possibile una valutazione dell'errore Δn_0 che si compie sul valore n_0 dal grafico.

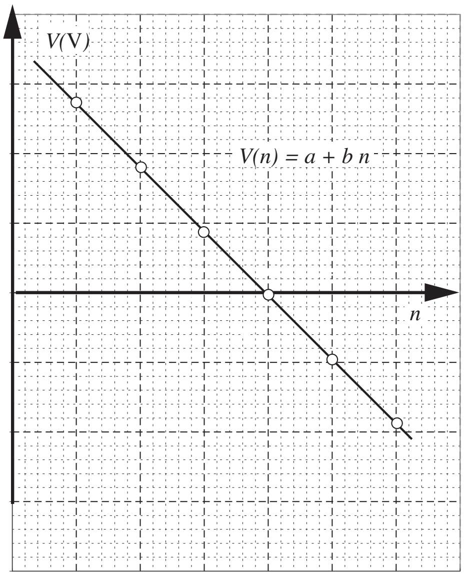

Figura 3

Determinazione della resistenza R_1[2]

Se propaghiamo gli errori (indipendenti) sulla (11) e dividiamo per R_1 otteniamo:

$$\left(\frac{\sigma_{R_1}}{R_1}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{R_2}}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{1000}{1000 - n_0}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{n_0}}{n_0}\right)^2 \quad : \qquad (12)$$

l'**errore relativo** sulla misura di R_1 dipende dall'errore relativo con cui è nota la resistenza R_2 e dall'errore dovuto al metodo di misura con cui si determina lo zero del voltmetro digitale, espresso dal secondo termine a destra della (11). Assumendo noto con grande precisione il valore della resistenza R_2, misurato con il multimetro digitale, $\Delta R_2 / R_2 = 0$, si ha:

$$\sigma_{R_1} = R_1 \frac{1000}{(1000 - n_0)} \frac{\sigma_{n_0}}{n_0} \quad . \qquad (13)$$

Si trascura l'errore sulla linearità del reostato pari allo 0.25 %.

La determinazione di n_0 e del suo errore relativo σ_{n_0}/n_0 dalla serie di dati sperimentali è fatta per via analitica utilizzando il **metodo dei minimi quadrati**[3].

Il metodo dei minimi quadrati, permette di calcolare a partire dalle N coppie di valori misurati (n_i, V_i), i valori dei coefficienti a e b in modo tale che la funzione (9) $V(n) = a + bn$ determinata meglio approssima la serie di dati sperimentali.

---

[2] Si utlizzano le formule della propagazione degli errori del paragrafo 5 delle dispense **Elementi di teoria degli errori per il laboratorio di Fisica**, che si trovano nel sito **http//www.fisica.unipd.it/didattica/ingegneria.**

[3] Si usano le formule del paragrafo 6, scegliendo così di procedere senza tenere conto degli errori ΔV_i sui singoli valori V_i misurati, ovvero considerandoli tutti uguali. La procedura corretta è invece riportata nel paragrafo 7.2; la scelta è legata all'esiguità degli errori e lo studente potrebbe verificare che la semplificazione che ne deriva è tale da non alterare significativamente il risultato.

Le formule del paragrafo 6[3], con i riferimenti del paragrafo stesso, sono riportati di seguito e direttamente nella tabella predisposta per la relazione, nella sequenza più adatta per eseguire i calcoli manualmente:

$$a = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} n_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} V_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} n_i V_i\right)}{\Delta} \quad ,$$

$$b = \frac{\left(N\sum_{i=1}^{N} n_i V_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} V_i\right)}{\Delta} \quad , \qquad (64)$$

$$\Delta = \left(N\sum_{i=1}^{N} n_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right)^2 \quad .$$

Per determinare l'errore sui coefficienti a e b così trovati, occorre avere una stima dell'errore medio $\langle \delta V \rangle$, determinato dalle differenze tra i valori V_i misurati e i valori $V_i = a + bn_i$ calcolati, ossia $\delta V_i = |V_i - a - bn_i|$:

$$\langle \delta V \rangle = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \delta V_i^2}{N-2}} \quad . \qquad (67)$$

Gli errori sui coefficienti si calcolano allora dalle:

$$\sigma_a = \langle \delta V \rangle \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} n_i^2}{\Delta}} \quad , \qquad \sigma_b = \langle \delta V \rangle \cdot \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \quad . \qquad (66)$$

Il valore di n_0 e del suo errore relativo sono determinati dalle relazioni:

$$n_0 = -\frac{a}{b} \quad , \qquad \frac{\sigma_{n_0}}{n_0} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2} \quad . \qquad (14)$$

Questi valori sostituiti nella (10) e nella (12) permettono di calcolare il $R_1 \pm \sigma_{R_1}$.

Data dell'esperienza…………………….. **Cassetta n…..**
Cognome e nome…………………………………………matricola……………..
Cognome e nome…………………………………………matricola……………..
Cognome e nome…………………………………………matricola……………..

MISURA DI UNA RESISTENZA CON IL PONTE DI WHEATSTONE

► Tabella delle misure

n_i (div)	V_i (mV)	$\pm\Delta V_i$ (mV)
950		
900		
850		
800		
750		
700		
650		
600		
550		
500		
450		
400		
350		
300		
250		
200		
150		
100		
50		

► Determinazione di n_0 e σ_{n_0}/n_0.

N=……….

$P = \sum_{i=1}^{N} n_i =$ ………………………………, $Q = \sum_{i=1}^{N} n_i^2 =$ ………………………………………

$R = \sum_{i=1}^{N} V_i =$ ………………………………, $S = \sum_{i=1}^{N} n_i V_i =$ ……………………………………..

$\Delta = NQ - P^2 =$ …………………………..

$a = \frac{QR - PS}{\Delta} =$ ………………..mV, $b = \frac{NS - PR}{\Delta} =$ …………….….. mV/div.

$$\langle \delta V \rangle = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \delta V_i^2}{N-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} |V_i - a - bn_i|^2}{N-2}} = \text{………………mV},$$

$\sigma_a = \langle \delta V \rangle \cdot \sqrt{\frac{Q}{\Delta}} =$ ………………mV, $\sigma_b = \langle \Delta V \rangle \cdot \sqrt{\frac{N}{\Delta}} =$ ……………… mV/div.

$n_0 = -\frac{a}{b} =$ ………………………………, $\frac{\sigma_{n_0}}{n_0} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2} =$ ………………

► Grafico dei dati sperimentali

► Calcolo della resistenza *R*₁

$$R_1 = R_2 \frac{n_0}{1000 - n_0} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Omega \ , \qquad \sigma_{R_1} = R_1 \cdot \frac{1000}{1000 - n_0} \cdot \frac{\sigma_{n_0}}{n_0} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \Omega,$$

$$R_1 = (\ldots\ldots\ldots\ldots \pm \ldots\ldots\ldots\ldots)\ \Omega.$$