

# Distribuzioni e Trasformata di Fourier

21 maggio 2014

## 1 Distribuzioni

Le distribuzioni sono un'estensione del concetto di funzione. Alla base c'è l'idea di identificare funzioni con funzionali lineari che agiscono sullo spazio di funzioni di prova che, come vedremo, sono usualmente caratterizzate da un buon comportamento. Varie operazioni su tali funzionali sono definibili applicandole sulle funzioni di prova. In tal modo è possibile dare senso all'azione di operatori, come la derivata, che non lo hanno nell'ambito usuale. Tipico esempio è la derivata della "funzione di Heavside" o funzione gradino o funzione theta,  $\theta(x)$  (denotata anche  $H(x)$ ) che, essendo discontinua nell'origine, non ammette derivata in quel punto. Introducendo il concetto di derivata distribuzionale risulta invece che  $\theta'(x) = \delta(x)$ , dove  $\delta$  denota la "funzione  $\delta$ " di Dirac. La teoria delle distribuzioni trova importanti applicazioni in molti campi della matematica e della fisica. Per esempio, sono ampiamente utilizzate per ottenere soluzioni generalizzate delle equazioni differenziali alle derivate parziali le cui soluzioni sono spesso estremamente difficili se non impossibili da determinare nell'usuale ambito. Le distribuzioni appaiono naturalmente anche in molti problemi di interesse fisico dove spesso la descrizione di un dato fenomeno porta a considerare equazioni differenziali le cui soluzioni e/o condizioni iniziali sono descritte da distribuzioni. Esempio tipico riguarda la densità di carica di un sistema di cariche puntiformi descritto da una combinazione lineare di delta di Dirac: la legge di Gauss per un sistema di  $n$  cariche  $q_1, \dots, q_n$  nel vuoto localizzate nei punti  $r_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , scritta in forma differenziale per il potenziale elettrostatico è

$$\Delta V(x, y, z) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \delta(z - z_i) ,$$

dove  $\Delta$  è l'operatore Laplaciano.

### 1.1 Distribuzioni temperate e distribuzioni di Schwartz

Iniziamo introducendo alcune definizioni.

*Definizione 1.* Lo spazio delle funzioni a decrescita rapida  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , noto come spazio delle funzioni di prova di Schwartz, è lo spazio delle funzioni complesse infinitamente differenziabili  $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$  tali che

$$\|u\|_{\alpha, \beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \frac{d^\beta}{dx^\beta} u(x)| < \infty , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} . \quad (1)$$

$\|u\|_{\alpha,\beta}$  soddisfa le proprietà di una norma. Risulta quindi che una funzione appartiene a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  se è  $C^\infty(\mathbb{R})$  e decresce, insieme a tutte le sue derivate, più rapidamente dell'inverso di ogni polinomio per  $x \rightarrow \pm\infty$ .

*Definizione 2.* Lo spazio duale di  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , cioè lo spazio dei funzionali lineari continui su  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , è detto spazio delle distribuzioni temperate ed è denotato  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

In altre parole, una distribuzione  $F$  è temperata se e solo se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \frac{d^\beta}{dx^\beta} u_k(x)| = 0 ,$$

implica, per tutti gli  $\alpha, \beta$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} F(u_k) = 0$ . Per determinare se un funzionale lineare  $F$  su  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  è continuo, e quindi se appartiene a  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , è utile il seguente teorema.

**Teorema 1.** *Un funzionale lineare  $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  è continuo se e solo se*

$$\exists \{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^k, \alpha_i, \beta_i, k \in \mathbb{N}, M > 0 \mid \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : |F(u)| \leq M \sum_{i=1}^k \|u\|_{\alpha_i, \beta_i} .$$

La generalizzazione al caso di  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  è ovvia. In particolare, quanto detto, incluso il precedente teorema, si estende al caso  $n > 1$  dove viene usata la seguente notazione.

*Definizione 3.* Sia  $\alpha := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \alpha_i \in \mathbb{N}$  e

$$D^\alpha := \prod_{i=1}^n \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}} , \quad x^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} .$$

Si indica con  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  lo spazio delle funzioni complesse  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tali che

$$\|u\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)| < \infty , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n .$$

Il duale  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  di  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  è detto spazio delle distribuzioni temperate in  $\mathbb{R}^n$ .

*Definizione 4.* Le distribuzioni di Schwartz in un sottoinsieme aperto  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  sono i funzionali lineari continui sullo spazio  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$  delle funzioni  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  definite su  $\mathcal{O}$  e nulle al di fuori di un compatto in  $\mathcal{O}$ .<sup>1</sup> Le funzioni appartenenti a  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ , come quelle in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , sono dette funzioni di prova.

---

<sup>1</sup>Sia  $(X, \mathcal{J})$  uno spazio topologico. Si consideri una famiglia  $\{A_i \mid i \in I\}$  di sottoinsiemi di  $X$ , dove l'insieme  $I$  può non essere numerabile. Tale famiglia è un ricoprimento di  $X$  se  $\cup_{i \in I} A_i = X$ . Se tutti gli  $A_i$  sono insiemi aperti della topologia  $\mathcal{J}$ , il ricoprimento è detto ricoprimento aperto. Si considerino tutti i possibili ricoprimenti di  $X$ .  $X$  è detto compatto se, per ogni ricoprimento aperto  $\{U_i \mid i \in I\}$  esiste un sottoinsieme finito  $J$  di  $I$  tale che  $\{U_j \mid j \in J\}$  è anche un ricoprimento di  $X$ . Nel caso in cui  $X$  è, come nel caso di  $\mathcal{O}$ , sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ , risulta che esso è compatto se e solo se è chiuso e limitato (qui il concetto di limitatezza può essere definito nel modo naturale utilizzando la metrica euclidea).

Un esempio di funzione a supporto compatto in  $\mathbb{R}$ , che sia anche  $C^\infty(\mathbb{R})$ , è

$$r(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{per } |x| < 1 \\ 0 & \text{per } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Questa funzione ha supporto in  $[-1, 1]$ , è infinitamente derivabile e si annulla con tutte le sue derivate per  $|x| \rightarrow 1$ .

Lo spazio dei funzionali lineari continui su  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$  è denotato  $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ . Risulta che ogni distribuzione in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  è una distribuzione in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

Oltre a  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  e  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , abbiamo già incontrato uno spazio duale di considerevole interesse. Si tratta del duale di uno spazio di Hilbert. Comunque, mentre lo spazio duale di uno spazio di Hilbert è isomorfo allo spazio stesso, lo spazio  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  è assai più esteso  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . In proposito, di seguito proviamo due teoremi che mostrano come lo spazio delle distribuzioni temperate  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  è molto ampio, in particolare, le stesse funzioni in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e, più generalmente, quelle appartenenti ad  $L^p(\mathbb{R}^n)$  definiscono elementi di  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Risulta che  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ , (la teoria degli spazi  $L^p(\mathbb{R}^n)$  presenta varie sottigliezze nel caso  $p < 1$ . Per questo nel seguito considereremo sempre il caso  $p \geq 1$ ). Infatti, se una funzione  $f$  appartiene ad  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  allora è continua e limitata ed andando a zero all'infinito più velocemente dell'inverso di qualsiasi potenza ne segue che  $|f|^p$  è integrabile su  $\mathbb{R}^n$ . Rivedremo questo risultato più avanti.

**Teorema 2.** *Esiste un'iniezione  $i : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  tale che  $i : f \mapsto F_f(\cdot)$ , dove*

$$F_f(u) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)d^n x, \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (2)$$

**Dimostrazione.** (Si osservi che sia  $f$  che  $u$  appartengono a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ). Dimostriamo il caso  $n = 1$ . Iniziamo con il mostrare che il funzionale  $F_f(u)$  è continuo. A tal fine è sufficiente mostrare che  $F_f$  è limitata dalle norme di  $u$ . Poiché  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ ,  $p \geq 1$ , segue che  $f$  ed  $u$  soddisfano le disuguaglianze di Hölder, in particolare quella con  $p = 1$ , che implica  $q = \infty$ . Da quanto detto, e osservando che  $|F_f(u)| = |\int_{\mathbb{R}} f(x)u(x)dx| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)u(x)|dx = \|fu\|_1$ , segue quindi

$$|F_f(u)| \leq \|fu\|_1 \leq \|f\|_1 \|u\|_\infty.$$

Si noti che la prima disuguaglianza non è altro che  $|\int_{\mathbb{R}} f(x)u(x)dx| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)u(x)|dx$ .

Già sappiamo che  $f$  appartiene a  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \geq 1$ . È comunque istruttivo mostrare esplicitamente il caso  $p = 1$  perché utilizza una ben nota tecnica di maggiorazione. Si ha

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \frac{1+x^2}{1+x^2} dx \leq (\|f\|_{0,0} + \|f\|_{2,0}) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx,$$

dove  $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx < \infty$ . Qui è stata usata la seguente proprietà. Date due funzioni  $g$  e  $h$  che, come  $|f(x)|(1+x^2)$  e  $(1+x^2)^{-1}$ , hanno valori non-negativi, vale l'ovvia disuguaglianza

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)h(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} \sup\{g(x)\}h(x)dx,$$

ed essendo  $\sup_{x \in \mathbb{R}} \{g(x)\}$  una costante

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)h(x)dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \{g(x)\} \int_{\mathbb{R}} h(x)dx.$$

È possibile mostrare che  $\|u\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|$ , ovvero, usando la notazione introdotta in (1)

$$\|u\|_\infty = \|u\|_{0,0} ,$$

cosicché

$$|F_f(u)| \leq c \|u\|_{0,0} , \quad c := \|f\|_1 ,$$

che implica la continuità di  $F_f(u)$ , quindi  $F_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

La dimostrazione del fatto che se  $f_1 \neq f_2$  come funzioni in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  allora  $F_{f_1} \neq F_{f_2}$  come funzionali in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  segue dal prossimo teorema.

**Teorema 3.** *Per ogni  $1 \leq p < \infty$  esiste un'iniezione  $i_p : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  tale che  $i_p : f \mapsto F_f(\cdot)$ , dove*

$$F_f(u) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)d^n x , \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) .$$

**Dimostrazione.** Consideriamo il caso  $n = 1$ . Si ha  $|F_f(u)| \leq \|fu\|_1$  e la disuguaglianza di Hölder implica  $\|fu\|_1 \leq \|f\|_p \|u\|_q$ , quindi

$$|F_f(u)| \leq \|f\|_p \|u\|_q , \quad (3)$$

dove  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , cioè  $|F_f(u)| \leq A \|u\|_q$ ,  $A := \|f\|_p$ . È ora necessario mostrare che  $\|u\|_q$  è maggiorata da una somma di sue norme  $\|u\|_{\alpha,\beta}$ . Cominciamo con il considerare la potenza  $q$ -esima di  $\|u\|_q$

$$\begin{aligned} \|u\|_q^q &:= \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^q dx = \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^q \frac{1 + |x^{2q}|}{1 + |x^{2q}|} dx \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \{ |u(x)|^q (1 + |x^{2q}|) \} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |x^{2q}|} dx = C_q^q \sup_{x \in \mathbb{R}} \{ |u(x)|^q + |x^{2q}| |u(x)|^q \} , \end{aligned}$$

dove  $C_q^q := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |x^{2q}|} dx < \infty$ . D'altronde, poiché (si ricordi la notazione introdotta in (1))

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|^q = (\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|)^q = \|u\|_{0,0}^q ,$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (|x^{2q}| |u(x)|^q) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^{2q} u(x)|^q = (\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^{2q} u(x)|)^q = \|u\|_{2,0}^q ,$$

si ha

$$\|u\|_q^q \leq C_q^q (\|u\|_{0,0}^q + \|u\|_{2,0}^q) .$$

Utilizzando la relazione  $\sqrt[n]{a^n + b^n} \leq a + b$ ,  $\forall a, b \geq 0$ , si ha

$$\|u\|_q \leq C_q \sqrt[q]{\|u\|_{0,0}^q + \|u\|_{2,0}^q} \leq C_q (\|u\|_{0,0} + \|u\|_{2,0}) ,$$

che insieme a (3) implica che il funzionale lineare  $F_f(u)$  è maggiorato da una combinazione lineare finita di norme di  $u$  per cui  $F_f$  è continuo, cioè  $F_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

Sia  $f_1 \sim f_2$ , cioè sia  $f_1 - f_2$  q.d.n.. L'indipendenza di  $F_f$  dal rappresentativo scelto nella classe di equivalenza di  $f$  è un'immediata conseguenza del fatto che il modulo dell'integrale di una data funzione è minore dell'integrale del suo modulo e della disuguaglianza di Hölder

$$|F_{f_1 - f_2}(u)| \leq \int_{\mathbb{R}} |(f_1(x) - f_2(x))u(x)| dx \leq \|f_1 - f_2\|_1 \|u\|_\infty .$$

D'altronde, se  $f_1 - f_2$  è q.d.n., allora  $\|f_1 - f_2\|_1 = 0$ . Perché  $i$  sia un'iniezione rimane quindi da mostrare che se  $F_{f_1} = F_{f_2}$  allora  $f_1 - f_2$  è q.d.n.. Si ha

$$0 = F_{f_1}(u) - F_{f_2}(u) = F_{f_1 - f_2}(u) = \int_{\mathbb{R}} (f_1(x) - f_2(x))u(x)dx ,$$

che, dovendo valere per ogni  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , implica che  $f_1 - f_2$  è q.d.n..

Si osservi che questo teorema implica il precedente. Infatti poiché  $\|u\|_q$  è maggiorato dalle norme (1) di  $u$  si ha, come già osservato,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R})$ . Segue che l'esistenza dell'iniezione  $i_p : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow S'(\mathbb{R})$  implica quella dell'iniezione  $i : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow S'(\mathbb{R})$  mostrata nel precedente teorema.

*Definizione 5.* Una distribuzione temperata  $F$  è detta regolare se esiste una funzione  $f(x)$  tale che

$$F_f(u) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)d^n x , \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) . \quad (4)$$

Mentre tutti gli spazi  $L^p$  definiscono distribuzioni temperate regolari, non tutte le distribuzioni temperate sono regolari. Come vedremo più avanti la "funzione  $\delta$ " di Dirac è un esempio di distribuzione temperata non regolare. Un altro esempio di distribuzione temperata non regolare è fornito dalla parte principale di Cauchy di  $\frac{1}{x}$

$$P\left(\frac{1}{x}\right)(u) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{u(x)}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{u(x) - u(-x)}{x} dx , \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) .$$

L'integrando è continuo nell'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x) - u(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(0) + xu'(0) - u(0) + xu'(0) + \dots}{x} = 2u'(0) ,$$

quindi il limite dell'integrale esiste e possiamo scrivere

$$P\left(\frac{1}{x}\right)(u) = \int_0^{\infty} \frac{u(x) - u(-x)}{x} dx , \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) . \quad (5)$$

Si noti che quest'espressione non è esprimibile nella forma (4), cioè come integrale su tutto  $\mathbb{R}$  di una funzione integrabile, quindi, come detto,  $P\left(\frac{1}{x}\right)(u)$  non è distribuzione temperata regolare. Un altro passaggio necessario per mostrare che  $P\left(\frac{1}{x}\right)(u)$  è una distribuzione temperata è provarne la continuità. A tal fine mostriamo la proprietà equivalente, ovvero che  $P\left(\frac{1}{x}\right)(u)$  è dominata da una somma finita di norme di  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Consideriamo quindi la maggiorazione

$$\left| P\left(\frac{1}{x}\right)(u) \right| \leq \int_0^{\infty} \left| \frac{u(x) - u(-x)}{x} \right| dx = \int_0^1 \left| \frac{u(x) - u(-x)}{x} \right| dx + \int_1^{\infty} \left| \frac{u(x) - u(-x)}{x} \right| dx . \quad (6)$$

Si osservi innanzitutto che dalla maggiorazione

$$\begin{aligned} \left| \frac{u(x) - u(-x)}{x} \right| &= \left| \frac{1}{x} \int_{-x}^x u'(t) dt \right| \leq \left| \frac{1}{x} \sup_{y \in [x, -x]} u'(y) \right| \left| \int_{-x}^x dt \right| \leq \left| \frac{1}{x} \sup_{y \in \mathbb{R}} u'(y) \right| \left| \int_{-x}^x dt \right| \\ &\leq 2 \sup_{y \in \mathbb{R}} |u'(y)| = 2\|u\|_{0,1} , \end{aligned}$$

dove si è usata la disuguaglianza  $|\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ , segue che il primo integrale nell'ultimo membro di (6) soddisfa la seguente disuguaglianza

$$\int_0^1 \left| \frac{u(x) - u(-x)}{x} \right| dx \leq \int_0^1 2\|u\|_{0,1} dx = 2\|u\|_{0,1} . \quad (7)$$

Per quanto riguarda il secondo integrale nell'ultimo membro di (6), si osservi che la disuguaglianza

$$|u(x) - u(-x)| \leq |u(x)| + |-u(-x)| = |u(x)| + |u(-x)| ,$$

e il fatto che nell'intervallo d'integrazione si ha  $|x| = x$ , implicano

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \left| \frac{u(x) - u(-x)}{x} \right| dx &\leq \int_1^\infty x \frac{|u(x)| + |u(-x)|}{x^2} dx \\ &\leq \sup_{x \in [1, \infty]} [x(|u(x)| + |u(-x)|)] \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \\ &= \sup_{x \in [1, \infty]} |xu(x)| + \sup_{x \in [1, \infty]} |xu(-x)| . \end{aligned}$$

Poiché

$$\sup_{x \in [1, \infty]} |xu(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |xu(x)| ,$$

e

$$\sup_{x \in [1, \infty]} |xu(-x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |xu(-x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |-xu(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |xu(x)| ,$$

si ha

$$\int_1^\infty \left| \frac{u(x) - u(-x)}{x} \right| dx \leq 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |xu(x)| \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 2\|u\|_{1,0} . \quad (8)$$

In definitiva, Eqs.(6), (7) e (8), implicano la maggiorazione

$$\left| P \left( \frac{1}{x} \right) (u) \right| \leq 2 (\|u\|_{0,1} + \|u\|_{1,0}) ,$$

il che mostra che effettivamente  $P \left( \frac{1}{x} \right) (u)$  è una distribuzione temperata.

Le distribuzioni hanno la proprietà di poter essere approssimate quanto si vuole da distribuzioni temperate regolari. Più precisamente, per ogni  $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  esiste una successione di distribuzioni temperate regolari  $\int_{\mathbb{R}^n} f_\nu(x)u(x)dx^n$  tale che la distribuzione temperata corrisponde a

$$F(u) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_\nu(x)u(x)dx^n , \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) .$$

Per illustrare questa proprietà è utile considerare le cosiddette funzioni generalizzate.

*Definizione 6.* Una sequenza di funzioni continue  $\{f_\nu(x)\}$  in  $\mathbb{R}^n$  è detta fondamentale se esiste una sequenza di funzioni continue  $\{F_\nu(x)\}$  in  $\mathbb{R}^n$  e un multi-indice di interi non-negativi  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  tale che le  $F_\nu(x)$  abbiano derivate parziali continue e soddisfino le seguenti condizioni

1.  $D^\alpha F_\nu(x) = f_\nu(x)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ ,
2. la sequenza  $\{F_\nu(x)\}$  converge alla funzione  $F(x)$ , la convergenza essendo uniforme su ogni insieme limitato,
3. le funzioni  $F_\nu(x)$  sono limitate da un singolo polinomio, cioè, esistono delle costanti  $A > 0$  e  $k \geq 0$  indipendenti da  $\nu$ , tali che per tutti i  $\nu = 1, 2, \dots$

$$|F_\nu(x)| \leq A[1 + (x_1^2 + \dots + x_n^2)^k] .$$

Due sequenze fondamentali  $\{f_\nu\}$  e  $\{g_\nu\}$  sono equivalenti,  $\{f_\nu\} \sim \{g_\nu\}$ , se la sequenza mista

$$f_1(x), g_1(x), f_2(x), g_2(x) \dots ,$$

è fondamentale. Questa relazione di equivalenza partisce l'insieme di sequenze fondamentali in classi di equivalenza chiamate funzioni generalizzate in  $\mathbb{R}^n$ .

Le operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare sullo spazio delle funzioni generalizzate sono definite nel modo ovvio  $\{f_\nu\}, \{g_\nu\} \rightarrow \{f_\nu + g_\nu\}$  e, se  $\lambda$  è una costante e  $\{f_\nu\}$  è una funzione generalizzata  $f$ , allora  $\{\lambda f_\nu\}$  definisce la funzione generalizzata  $\lambda f$ . La classe definita dalla sequenza  $\{f_\nu + g_\nu\}$  dipende solamente dalle classi  $f \ni \{f_\nu\}$  e  $g \ni \{g_\nu\}$ .

Sia  $\{f_\nu\}$  una sequenza fondamentale ed  $F(x)$  la funzione continua corrispondente. Associamo alla classe di equivalenza alla quale  $\{f_\nu\}$  appartiene, il funzionale

$$F_f(u) := (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} F(x) D^\alpha u(x) d^n x , \quad |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n , \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) .$$

Si può mostrare che dalle condizioni 1., 2. e 3. segue

$$F_f(u) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_\nu(x) u(x) d^n x , \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) .$$

Risulta che tale funzionale dipende solamente dalla classe di equivalenza delle sequenze e non dalla specifica scelta della sequenza, l'insieme delle sequenze di interi  $\alpha := (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$  o dalle primitive  $\{F_\nu(x)\}$ .

Una proprietà importante dello spazio delle funzioni generalizzate è che questo risulta isomorfo allo spazio delle distribuzioni temperate  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Anche se qui non riportiamo la dimostrazione, è utile enunciare un altro importante risultato riguardante lo spazio  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  e su cui si basa la dimostrazione di tale isomorfismo.

**Teorema 4.** *Lo spazio  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  consiste di tutti i funzionali della forma*

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha u(x) d^n x , \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) ,$$

con  $f$  una funzione continua di crescita al più polinomiale.

Enunciamo ora il teorema che definisce la distribuzione temperata  $\delta$  di Dirac.

**Teorema 5.** Sia  $\{f_\nu\}$  una successione di funzioni continue a tratti su  $\mathbb{R}$  tali che  $\|f_\nu\|_1 < C < \infty$  e tali che  $\forall a < b$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b f_\nu(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \notin ]a, b[ , \\ 1 & \text{per } 0 \in ]a, b[ , \end{cases} \quad (9)$$

allora

$$\delta(u) := \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b f_\nu(x) u(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \notin ]a, b[ , \\ u(0) & \text{per } 0 \in ]a, b[ . \end{cases}$$

$\delta(u)$  definisce il funzionale delta di Dirac. Risulta che le sequenze

$$f_\nu = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} e^{-\frac{\nu x^2}{2}}, \quad g_\nu = \frac{1}{\pi} \frac{\nu}{\nu^2 x^2 + 1}, \quad h_\nu = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \nu x}{x}, \quad (10)$$

sono fondamentali ed equivalenti tra loro e soddisfano le proprietà (9). Si noti che la distribuzione temperata non è regolare. In merito è bene osservare che la notazione

$$\delta(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) u(x) d^n x = u(0),$$

è meramente simbolica poiché  $\delta(u)$  è definito come limite di una sequenza di integrali e non esiste alcuna “funzione delta”  $\delta(x)$ .

## 1.2 Composizione delle distribuzione con i diffeomorfismi

Sia  $y_1 = h_1(x), \dots, y_n = h_n(x)$ ,  $x := (x_1, \dots, x_n)$  una mappa uno ad uno (biiettiva)  $C^\infty$  da  $\mathbb{R}^n$  su se stesso con inverso  $x = h^{-1}(y)$  ancora in  $C^\infty$  (una tale mappa è detta diffeomorfismo). Si ha quindi che la Jacobiana della trasformazione è non nulla, cioè

$$J(h) := \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Se  $f$  è integrabile su ogni sottoinsieme compatto di  $\mathbb{R}^n$ , cioè localmente integrabile, e  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , allora

$$\begin{aligned} F_{f(h^{-1}(y))}(u(y)) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(h^{-1}(y)) u(y) d^n y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) u(h(x)) |J(h(x))| d^n x \\ &= F_{f(x)}(|J(h(x))| u(h(x))). \end{aligned}$$

Una notazione alternativa a  $F_f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) u(x) d^n x$  è

$$(f, u) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) u(x) d^n x, \quad (11)$$

così la relazione precedente può essere espressa come

$$(f(h^{-1}(y)), u(y)) = (f(x), |J(h)| u(h(x))), \quad (12)$$



o, essendo  $x$  e  $y$  variabili d'integrazione, nel modo equivalente

$$(f(h^{-1}), u) = (f, |J(h)|u(h)) .$$

Quando  $f$  definisce una distribuzione, questa uguaglianza definisce la distribuzione  $f \circ h^{-1}$ .

Si osservi che la notazione  $(f, u)$  può essere consistentemente utilizzata per denotare una distribuzione temperata anche se questa non è regolare (cioè della forma (11)).

*Esempio 1.* Utilizzando la notazione  $(\delta, u) := \delta(u)$ , si ha

$$(\delta(c^{-1}(x - a)), u(x)) = (\delta(y), |c|u(cy + a)) = |c|u(a) .$$

Spesso è più agevole utilizzare la notazione simbolica

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(c^{-1}(x - a))u(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \delta(y)u(cy + a)|c|dy = |c|u(a) ,$$

dove  $\delta(x)$  è utilizzata come se fosse una funzione. Ovviamente la giusta notazione della precedente relazione è

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_{\nu}(c^{-1}(x - a))u(x)dx = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_{\nu}(y)u(cy + a)|c|dy = |c|u(a) .$$

### 1.3 Derivata delle distribuzioni temperate

Un esempio di diffeomorfismo  $y = h(x)$ , è la traslazione  $y_1 = x_1 - \Delta x_1, y_k = x_k, k = 2, \dots, n$ . In tal caso quindi  $h$  trasla la prima componente del suo argomento della quantità costante  $-\Delta x_1$ . Eq.(12) implica

$$\left( \frac{f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_1}, u(x) \right) = - \left( f(x), \frac{u(x_1 - \Delta x_1, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_n)}{-\Delta x_1} \right) ,$$

dove, per comodità, si è utilizzato  $x$  come argomento di  $h^{-1}$ , cosicché

$$f(h^{-1}(x)) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) .$$

Si noti anche che la variabile  $x$  è quella d'integrazione. La continuità del funzionale  $(f, \cdot)$  implica che il membro destro esiste anche nel limite  $\Delta x_1 \rightarrow 0$ . Questo significa che per  $\Delta x_1 \rightarrow 0$  il secondo membro della precedente relazione è  $-(f, \frac{\partial u}{\partial x_1})$ . Definiamo tale limite come derivata parziale della funzione generalizzata  $f$ . In generale

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_k}, u \right) := - \left( f, \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) . \tag{13}$$

Poiché  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , tale formula può essere ottenuta integrando per parti quando  $f(x)$  ha derivate parziali con crescita all'infinito al più polinomiale. Si osservi anche che poiché la derivata di ogni funzione generalizzata è ancora una funzione generalizzata, è chiaro che le funzioni generalizzate hanno derivate parziali a tutti gli ordini. Un'altra importante osservazione è che la differenziazione è un'operazione continua in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Cioè, se  $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, u) = (f, u)$ , allora  $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial f_n}{\partial x}, u \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, u \right) .$$

Consideriamo ora alcuni importanti esempi di funzioni generalizzate e loro derivate.

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 . \end{cases}$$

$$\left( \frac{d\theta}{dx}, u \right) = - \int_{\mathbb{R}} \theta(x) \frac{du}{dx} dx = - \int_0^{\infty} \frac{du}{dx} dx = u(0) = (\delta, u) . \quad (14)$$

Un altro caso rilevante riguarda la derivata del logaritmo. Poiché c'è una singolarità sul cammino d'integrazione, questo lo definiamo come parte principale

$$\begin{aligned} \left( \frac{d \log |x|}{dx}, u(x) \right) &= - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-\infty}^{-\epsilon} u'(x) \log(-x) dx + \int_{\epsilon}^{\infty} u'(x) \log x dx \right) \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left( \int_{\infty}^{\epsilon} \frac{du(-x)}{d(-x)} \log x d(-x) + u(x) \log x \Big|_{\epsilon}^{\infty} - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{u(x)}{x} dx \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[ (u(-x) - u(x)) \log x \Big|_{\epsilon}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{u(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{u(x)}{x} dx \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{u(x) - u(-x)}{x} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{u(x) - u(-x)}{x} dx \\ &= P \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x)}{x} dx , \end{aligned} \quad (15)$$

dove abbiamo utilizzato

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} (u(-\epsilon) - u(\epsilon)) \log \epsilon = 0 ,$$

che segue sviluppando in serie  $u(-\epsilon) - u(\epsilon)$  e osservando che  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon^n \log \epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon^{-1}}{-n\epsilon^{-n-1}} = 0$ ,  $\forall n > 0$ . Si noti inoltre che l'ultima uguaglianza di (15) non è altro che Eq.(5).

In modo analogo a quanto sopra fatto, possiamo definire  $P(1/x^2)$  come la derivata della distribuzione temperata  $-P(1/x)$

$$\begin{aligned} \left( P\left(\frac{1}{x^2}\right), u(x) \right) &= \left( P\left(\frac{1}{x}\right), u'(x) \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{u'(x) - u'(-x)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{u(x) + u(-x) - 2u(0)}{x^2} dx . \end{aligned} \quad (16)$$

Prima di descrivere i passaggi che giustificano l'ultima uguaglianza, osserviamo che (15) e (16) hanno l'ovvia generalizzazione definendo

$$P\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^n}{dx^n} \log |x| , \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

dove la derivata va intesa nel senso delle distribuzioni, cioè in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

## 1.4 Un commento sul calcolo di $P(1/x^2)$

Nell'utilizzo dell'integrazione per parti è possibile scegliere una costante d'integrazione, scelta che può semplificare i conti. Nel caso di  $P(1/x^2)$ , si osservi che

$$\frac{u'(x) - u'(-x)}{x} = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} [u(x) + u(-x) + \text{costante}] .$$

Si noti che l'apice indica la derivazione rispetto all'argomento, quindi  $u'(x) := du(x)/dx$ , e  $u'(-x) := du(-x)/d(-x) = -du(-x)/dx$ . Scegliamo come costante  $-2u(0)$ . Consideriamo ora

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{u(x) + u(-x) - 2u(0)}{x} \right] = -\frac{1}{x^2} [u(x) + u(-x) - 2u(0)] + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} [u(x) + u(-x) - 2u(0)] .$$

Integrando

$$\frac{u(x) + u(-x) - 2u(0)}{x} \Big|_0^\infty = -\int_0^\infty \frac{1}{x^2} [u(x) + u(-x) - 2u(0)] dx + \int_0^\infty \frac{1}{x} [u'(x) - u'(-x)] dx .$$

Si osservi che in tal modo il membro a sinistra è nullo sia a  $\infty$  che in 0, quindi

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} [u'(x) - u'(-x)] dx = \int_0^\infty \frac{1}{x^2} [u(x) + u(-x) - 2u(0)] dx .$$

Inoltre, come risulta sviluppando intorno a 0, l'integrando  $[u(x) + u(-x) - 2u(0)]/x^2$ , come  $[u'(x) - u'(-x)]/x$ , non è singolare in 0. In tal modo i due integrandi non hanno singolarità lungo il cammino di integrazione, quindi il limite per  $\epsilon \rightarrow 0$  può essere eliminato ponendo 0 nell'estremo inferiore d'integrazione.

## 1.5 Una relazione notevole tra $\frac{1}{(x \pm i0)^n}$ , $P\left(\frac{1}{x^n}\right)$ e $\delta^{(n-1)}(x)$

Iniziamo con il considerare la seguente interessante relazione

$$\log(x \pm i0) := \lim_{y \rightarrow +0} \log(x \pm iy) = \log|x| + i \lim_{y \rightarrow +0} \arg(x \pm iy) = \log|x| \pm i\pi\theta(-x) . \quad (18)$$

Si osservi che se  $x > 0$ , allora, come deve essere (può essere istruttivo considerare graficamente l'ultima uguaglianza), l'argomento tende a 0, mentre tende a  $\pm\pi$  se  $x < 0$ . In proposito si noti che in (18) si intende l'argomento principale di  $\arg(x \pm iy)$  e quindi lo stesso  $\log(x \pm iy)$  va inteso come valor principale del logaritmo (altrimenti nell'ultimo membro si dovrebbe aggiungere  $2n\pi i$ , con  $n$  qualsiasi intero).

Le equazioni (14), (17) e (18) implicano

$$\frac{1}{x \pm i0} := \frac{d}{dx} \log(x \pm i0) = P\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta(x) , \quad (19)$$

già ottenuta in analisi complessa. Questa relazione implica

$$\frac{1}{x - i0} - \frac{1}{x + i0} = 2\pi i\delta(x) .$$

Differenziando la (19) si ottiene

$$\frac{1}{(x \pm i0)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^n}{dx^n} \log(x \pm i0) = P\left(\frac{1}{x^n}\right) \pm \frac{(-1)^n}{(n-1)!} i\pi\delta^{(n-1)}(x) .$$

Si noti che Eq.(13) implica

$$(\delta^{(n)}, u) = (-1)^n u^{(n)}(0) .$$

A proposito di derivate delle distribuzioni, talvolta è opportuno, per la semplificazione dei calcoli, tener presente la seguente ovvia osservazione. Poiché la derivata di una distribuzione  $(f, u)$  è  $-(f, u')$ , segue che se una parte di questa,  $(f - g, u)$ , è esprimibile come combinazione lineare della funzione di prova e delle sue derivate calcolate in un insieme di punti, cioè se

$$(f, u) = (g, u) + \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m c_{j,k} u^{(j)}(x_k) ,$$

allora, poiché

$$u^{(j)}(x_k) = ((-1)^j \delta^{(j)}(x - x_k), u(x)) ,$$

e

$$((-1)^j \delta^{(j+1)}(x - x_k), u(x)) = -u^{(j+1)}(x_k) ,$$

si ha

$$(f', u) = -(f, u') = -(g, u') - \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m c_{j,k} u^{(j+1)}(x_k) .$$

In altre parole, se una parte della distribuzione temperata è espressa nella forma  $\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m c_{j,k} u^{(j)}(x_k)$ , allora la derivata relativa a questa parte non è altro che  $-\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m c_{j,k} u^{(j+1)}(x_k)$ .

## 1.6 Lo spazio dei moltiplicatori $\Theta_M(\mathbb{R}^n)$

Abbiamo visto che è possibile differenziare le funzioni generalizzate un numero arbitrario di volte. Si osservi anche che l'ordine di differenziazione è irrilevante, cioè si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} ,$$

in quanto tale relazione vale per le funzioni di prova (fatto in generale non vero per le funzioni ordinarie).

Consideriamo ora il problema di definire la moltiplicazione di una distribuzione temperata per una funzione. È facile vedere che è impossibile definire un prodotto che sia bilineare e associativo e soddisfi, ad esempio, le seguenti condizioni naturali

$$\delta(x) \cdot x = 0 , \quad x \cdot \frac{1}{x} = 1 .$$

Infatti

$$\delta(x) \left\{ x \cdot \frac{1}{x} \right\} = \delta(x) \neq \left\{ \delta(x) \cdot x \right\} \frac{1}{x} = 0 .$$

Nonostante ciò esiste un'ampia classe di funzioni per le quali è possibile definire, in modo opportuno, il loro prodotto con distribuzioni temperate.

*Definizione 7.* Una funzione  $h(x)$  è detta moltiplicatore nello spazio delle funzioni di prova  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se  $hu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Lo spazio di tutti i moltiplicatori è denotato con  $\Theta_M(\mathbb{R}^n)$ . Si può mostrare che affinché  $h$  sia un moltiplicatore è necessario e sufficiente che sia infinitamente differenziabile e cresca, insieme alle sue derivate parziali, al più polinomialmente, cioè

$$\Theta_M(\mathbb{R}^n) := \left\{ h \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N} \exists N_\alpha, C_\alpha \mid |D^\alpha h(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{N_\alpha} \right\} .$$

Si osservi che da quanto detto segue che  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \Theta_M(\mathbb{R}^n)$ , fatto ovvio a priori poiché se  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e  $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , allora  $uv$  soddisfa le condizioni (1), come segue esprimendo ogni  $\|uv\|_{\alpha,\beta}$  come combinazione lineare finita del prodotto di norme di  $u$  e  $v$ .

*Definizione 8.* Se  $h \in \Theta_M(\mathbb{R}^n)$ , allora il prodotto di  $h$  per  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  è definito dalla relazione

$$(hf, u) := (f, hu) . \quad (20)$$

Tale moltiplicazione risulta per definizione commutativa:  $hf = fh$ . Si osservi che se  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  allora anche  $fh$  appartiene ad  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  (come segue da (20) e dal fatto che  $hu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  con  $h \in \Theta_M(\mathbb{R}^n)$  e  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ).

Si noti che, da quanto descritto, segue  $(x\delta, u) = (\delta, xu) = (xu(x))|_{x=0} = 0$ , e

$$(x\delta', u) = (\delta', xu) = -(\delta, (xu)') = -(\delta, u) - (\delta, xu') = -u(0) - xu'(x)|_{x=0} = -u(0) ,$$

cioè  $x\delta' = -\delta$ . Riportiamo di seguito alcune proprietà della  $\delta$  di Dirac

$$\begin{aligned} \delta(-x) &= \delta(x) , \\ \delta(ax) &= \frac{1}{|a|}\delta(x) , \quad a \in \mathbb{R} , \\ h(x)\delta(x - x_0) &= h(x_0)\delta(x - x_0) , \quad h \in \Theta_M(\mathbb{R}) , \\ x\delta(x) &= 0 , \\ \delta(y(x)) &= \frac{1}{|y'(x)|} \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x - x_i)}{|y'(x_i)|} , \end{aligned}$$

con  $y(x)$  una funzione arbitraria che possenga solo  $n$  zeri semplici, per  $x = x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  nell'intorno dei quali  $y(x)$  sia continua ed invertibile.

Si osservi che la I relazione è una conseguenza della II già mostrata nell'esempio 1 (a sua volta conseguenza dell'ultima relazione). Infatti, la relazione

$$(\delta(c^{-1}(x - a)), u(x)) = (\delta(y), |c|u(cy + a)) = |c|u(a) ,$$

ed il fatto che  $|c|u(a) = (|c|\delta(x - a), u(x))$ , implicano

$$\delta(c^{-1}(x - a)) = |c|\delta(x - a) .$$

La terza relazione è altrettanto ovvia

$$(h(x)\delta(x - x_0), u(x)) = (\delta(x - x_0), h(x)u(x)) = h(x_0)u(x_0) = (h(x_0)\delta(x - x_0), u(x)) ,$$

$\forall h \in \Theta_M(\mathbb{R})$ . La quarta relazione è già stata mostrata, mentre l'ultima segue immediatamente utilizzando la definizione della composizione della delta con i diffeomorfismi.

Vediamo ora alcuni altri esempi che bene illustrano le proprietà discusse finora. Si consideri il funzionale su  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$(|x|, u(x)) = \int_{\mathbb{R}} |x|u(x)dx , \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) .$$

È immediato mostrare che si tratta di una distribuzione temperata. Infatti, si ha

$$|x| = x \operatorname{sgn} x, \quad x \in \Theta_M(\mathbb{R}), \quad \operatorname{sgn} x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

e poiché  $hf \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  se  $h \in \Theta_M(\mathbb{R})$  e  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , segue  $|x| \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Equivalentemente

$$|(|x|, u(x))| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| \frac{|x|}{1+x^4} (1+x^4) dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \{|u(x)|(1+x^4)\} \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{1+x^4} dx,$$

cioè

$$|(|x|, u(x))| \leq C(\|u\|_{0,0} + \|u\|_{4,0}),$$

dove  $C := \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{1+x^4} dx$ . Si noti che se  $h \in \Theta_M(\mathbb{R})$  e  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , allora, poiché  $hf \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , si ha  $((hf)', u) = -(hf, u')$ , da cui segue

$$(hf)' = h'f + hf'.$$

Infatti

$$((hf)', u) = -(hf, u') = -(f, hu') = -(f, (hu)' - h'u) = (f', hu) + (h'f, u) = (hf' + h'f, u).$$

Come esempio consideriamo la derivata di  $|x|$

$$|x|' = \operatorname{sgn} x + x(2\theta(x) - 1)' = \operatorname{sgn} x + x2\delta(x) = \operatorname{sgn} x,$$

dove si è utilizzata la relazione  $\operatorname{sgn} x = \theta(x) - \theta(-x) = 2\theta(x) - 1$ . Equivalentemente

$$(|x|', u) = -(|x|, u') = \int_{-\infty}^0 xu'(x) dx - \int_0^{\infty} xu'(x) dx = - \int_{-\infty}^0 u(x) dx + \int_0^{\infty} u(x) dx = (\operatorname{sgn} x, u),$$

dove nell'integrazione per parti si è usato il fatto che, essendo  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $xu(x)$  si annulla all'infinito oltre che in  $x = 0$ .

Si osservi che la scelta della potenza  $n$  in

$$1 = \frac{1+x^n}{1+x^n},$$

è dettata da due fattori. La prima è che  $n$  deve essere un numero positivo pari, questo per evitare che il cammino di integrazione nella definizione di  $C$  contenga un punto corrispondente ad una singolarità dell'integrando (per  $n$  dispari il punto  $x = -1$  sarebbe un polo nell'integrando di  $C$  appartenente all'intervallo di integrazione). L'altro aspetto è che il termine  $(1+x^n)$  a denominatore nell'integrando di  $C$  deve garantire l'esistenza dell'integrale necessaria affinché la maggiorazione abbia senso. Quindi, se la  $f$  in

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)f(x) dx,$$

ha un andamento come  $x^m$  all'infinito, allora è necessario scegliere  $n = m + 2$  se  $m$  è pari, altrimenti  $n = m + 3$ . In tal modo l'andamento all'infinito dell'integrando in

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{1+x^n} dx,$$

sarebbe  $1/x^2$  o  $1/x^3$  e l'integrale sarebbe definito. Chiaramente si possono scegliere potenze pari tali che  $n - m > 2$ , la precedente scelta è quella minimale.

## 2 Convoluzione

*Definizione 9.* Siano  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . L'integrale

$$(f * g)(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)g(x)d^n x ,$$

è detto convoluzione tra  $f$  e  $g$ .

La convoluzione è simmetrica, ovvero, ponendo  $t = y - x$ , si ha

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y-t)f(t)d^n t = (g * f)(y) .$$

Un'altra proprietà della convoluzione è l'associatività

$$(f * (g * h)) = ((f * g) * h) = f * g * h .$$

Si dimostra che per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  l'applicazione  $T_{f*} : g \rightarrow f * g$  è continua. Come nel caso della moltiplicazione, anche la convoluzione tra una coppia arbitraria di funzioni generalizzate non è definita. Comunque la convoluzione di una funzione generalizzata  $f$  con una funzione di prova  $u$  è naturalmente definita utilizzando la simmetria della convoluzione, cioè riscrivendo  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)d^n y$  come  $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)d^n y$  cosicché

$$(f * u)(x) = (f(y), u(x-y))_y := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)u(x-y)d^n y , \quad (21)$$

dove il pedice indica che  $y$  è la variabile d'integrazione. La prima uguaglianza è la definizione di convoluzione come azione del funzionale  $f(y)$  sulla funzione di prova  $u(x-y)$  riconsiderata come funzione di  $y$  per  $x$  fissato. In altre parole  $x$  è visto come parametro caratterizzante la funzione  $v_x(y) := u(x-y)$ .

- Si può dimostrare che la convoluzione (21) è una funzione infinitamente differenziabile di  $x$ , di crescita al più polinomiale insieme a tutte le sue derivate. In altre parole, se  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  e  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , allora  $f * u \in \Theta_M(\mathbb{R}^n)$ , cioè la convoluzione (21) è un moltiplicatore.
- In generale  $f * u \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Per esempio, se  $f(y)$  è un polinomio, allora  $f * u(x)$  è lui stesso un polinomio e quindi non decresce per  $x \rightarrow \pm\infty$ . Le distribuzioni che fanno eccezione sono dette convolute. Più precisamente

*Definizione 10.*  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  è detta convoluta (o funzionale di convoluzione) in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se  $g * u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  per ogni  $u(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Lo spazio dei convoluti è denotato con  $\Theta_c(\mathbb{R}^n)$ .

- Se  $g$  è convoluta, la sua convoluzione con qualsiasi  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , è

$$(f * g, u) = (f(y), (g(x), u(x+y))_x)_y = (f(y), (g(-x) * u(x))(y))_y , \quad (22)$$

dove  $g(-x) * u(x)$  indica che la convoluzione è tra  $g$  composta con la funzione  $h(x) = -x$  e  $u(x)$ . In proposito si osservi che (22) è ben definita in quanto se  $g * u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , allora  $(g \circ h) * u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . A sua volta ciò segue dal fatto che se  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  allora  $u \circ h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , quindi, essendo  $g$  convoluta, si ha  $g * (u \circ h) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  che, come si può verificare effettuando un cambio di variabile, è equivalente a  $(g \circ h) * u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Si osservi che in (22) abbiamo utilizzato la simmetria  $f * g = g * f$  e le seguenti relazioni

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)u(y)d^n x d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(t)u(t+x)d^n x d^n t ,$$

e la proprietà generale  $\int_{\mathbb{R}^n} F(x)d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} F(-x)d^n x$  valida per qualsiasi funzione  $F$  integrabile su  $\mathbb{R}^n$ , da cui

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(t)u(t+x)d^n t = ((g \circ h) * u)(x) .$$

- Un esempio di convoluta è la funzione generalizzata  $D^\alpha \delta(x)$  per ogni  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Più generalmente, se una funzione generalizzata ha supporto limitato, allora è convoluta.
- Come si è visto c'è un'iniezione tra lo spazio delle funzioni di prova e le distribuzioni temperate. In particolare, ad ogni funzione di prova  $g$  è associata la distribuzione temperata regolare  $(g, u)$ . D'altronde, poiché sia  $g$  che  $u$  appartengono a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , e quindi  $gu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , è chiaro che  $g$ , identificata con la corrispondente distribuzione temperata, è convoluta. Si verifica immediatamente che le espressioni (21) e (22) per  $(f * g, u)$ , con  $f$  distribuzione temperata e  $g$  funzione di prova, coincidono considerando  $g$  come convoluta.
- Si osservi che se  $f, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , allora

$$(f * u)' = f' * u = f * u' , \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) ,$$

infatti

$$\frac{\partial}{\partial y}(f * u)(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial y} f(y-x)u(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} f(y-x)u(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(y-x) \frac{\partial}{\partial x} u(x)dx .$$

### 3 Trasformata di Fourier

Consideriamo l'equazione del moto di una particella di massa  $m$  fissata all'estremità di una molla di costante elastica  $k$  e soggetta ad una forza esterna  $f(t)$

$$m\ddot{x} + kx = f(t) . \tag{23}$$

Nel caso di  $f(t) = f_0 \sin(n\omega t)$ , la soluzione è

$$x(t) = A \sin(\Omega t + \phi) + \frac{f_0}{m[\Omega^2 - (n\omega)^2]} \sin(n\omega t) , \tag{24}$$

$\Omega = \sqrt{k/m}$ . Poiché l'equazione differenziale (23) è lineare, segue che nel caso più generale in cui  $f(t)$  ha periodo  $2T$ , è possibile sviluppare  $f(t)$  in serie di Fourier con una base completa trigonometrica, cosicché la soluzione  $x(t)$  è data da una somma di termini del tipo (24).



Consideriamo ora il caso in cui  $f(t)$  non sia periodica. Possiamo ancora applicare la tecnica di soluzione precedente; a tal fine è sufficiente considerare  $f(t)$  come funzione periodica di periodo infinito. Poiché le pulsazioni che contribuiscono allo sviluppo in serie di Fourier sono  $\omega_n = n\pi/T$ , segue che la differenza

$$\omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{T} ,$$

tende a zero per  $T \rightarrow \infty$ . In tal caso lo sviluppo in serie di Fourier

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t} ,$$

dove

$$c_k = \int_{-T}^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt ,$$

deve essere sostituito dall'integrale

$$f(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega , \quad (25)$$

dove

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt . \quad (26)$$

Si noti che l'argomento che ha condotto a (25) e (26) è euristico e verrà formalizzato più avanti.

Aggiungiamo ora all'equazione differenziale (23) un termine di smorzamento

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t) , \quad (27)$$

e consideriamo, come nel caso dello sviluppo di Fourier, la funzione  $\hat{f}(\omega)$  che corrisponde all'ampiezza con cui compare in  $f(t)$  la componente  $e^{i\omega t}$ . Nel caso in cui  $f(t) = \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}$ , possiamo cercare la soluzione nella forma

$$x(t) = x_0(\omega) \frac{e^{i\omega t}}{(2\pi)^{1/2}} .$$

Sostituendo in (27) si ha

$$x_0(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{m(\Omega^2 - \omega^2) + ib\omega} . \quad (28)$$

Nel caso generale in cui la forza esterna è (25), la soluzione di (27) è

$$x(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} x_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega ,$$

con  $x_0(\omega)$  dato in (28). Quindi

$$x(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(\omega)}{m(\Omega^2 - \omega^2) + ib\omega} e^{i\omega t} d\omega .$$

È quindi possibile esprimere la soluzione di una data equazione differenziale lineare come integrale sui modi d'espansione della funzione  $f(t)$  il cui integrando è determinato da  $\hat{f}(\omega)$  e dalla

struttura dell'equazione differenziale. La determinazione di  $\hat{f}(\omega)$ , corrispondente all'ampiezza del modo di oscillazione  $\omega$  che contribuisce a  $f(t)$ , è quindi cruciale. Tale funzione è nota come trasformata di Fourier di  $f(t)$ .

La trasformata di Fourier è uno strumento fondamentale in molti campi della matematica con importanti applicazioni in fisica. In questo contesto, un'importante proprietà delle distribuzioni temperate è che queste ammettono sempre una trasformata di Fourier, mentre non tutte le distribuzioni ammettono una trasformata di Fourier. Iniziamo con il considerare la trasformata di Fourier in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

*Definizione 11.* Sia  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . La trasformata di Fourier  $\hat{f}$  (o  $\tilde{f}$  o  $\mathcal{F}(f)$ ) di  $f$  è definita da

$$\hat{f}(p) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ipx} f(x) d^n x, \quad (29)$$

con  $p \in \mathbb{R}^n$ , e  $px := \sum_{i=1}^n p_i x_i$ .

La trasformata di Fourier inversa, o anti-trasformata, denotata con  $\check{f}$  (o  $\mathcal{F}^{-1}(f)$ ), è

$$\check{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ipx} f(p) d^n p.$$

Dimostriamo ora un importante lemma.

**Lemma 1.** *Le mappe  $T_{\mathcal{F}} : f \mapsto \hat{f}$  e  $T_{\mathcal{F}^{-1}} : f \mapsto \check{f}$  sono continue da  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , inoltre*

$$(ip)^\alpha D_p^\beta \hat{f}(p) = \mathcal{F}(D_x^\alpha [(-ix)^\beta f(x)])(p),$$

*cioè la trasformata di Fourier scambia il ruolo tra derivate e potenze.*

**Dimostrazione.**

$$\begin{aligned} (ip)^\alpha D_p^\beta \hat{f}(p) &= \frac{(ip)^\alpha}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} D_p^\beta e^{-ipx} f(x) d^n x = \frac{(-1)^\alpha}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (-ip)^\alpha e^{-ipx} (-ix)^\beta f(x) d^n x \\ &= \frac{(-1)^\alpha}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha (e^{-ipx}) (-ix)^\beta f(x) d^n x. \end{aligned}$$

Integrando per parti si ottiene, tra l'altro, un termine  $\frac{(-1)^\alpha}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} [D_x^{\alpha-1} (e^{-ipx}) (-ix)^\beta f(x)]_{\infty_n}$  che è nullo perché  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Quindi

$$(ip)^\alpha D_p^\beta \hat{f}(p) = -\frac{(-1)^\alpha}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^{\alpha-1} (e^{-ipx}) D_x [(-ix)^\beta f(x)] d^n x,$$

ed iterando la derivazione per parti si ottiene

$$(ip)^\alpha D_p^\beta \hat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ipx} D_x^\alpha [(-ix)^\beta f(x)] d^n x = \mathcal{F}(D_x^\alpha [(-ix)^\beta f(x)])(p),$$

che dimostra l'ultima parte del lemma. Consideriamo il caso  $n = 1$  (l'estensione al caso  $n > 1$  è immediata) e si noti che

$$\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta} = \sup_{p \in \mathbb{R}} |p^\alpha D^\beta \hat{f}(p)|,$$

quindi

$$\begin{aligned}\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta} &= \sup_{p \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} D_x^\alpha [(-ix)^\beta f(x)] dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |D_x^\alpha (x^\beta f(x))| dx < \infty ,\end{aligned}\tag{30}$$

per ogni  $\alpha, \beta$ , da cui segue che  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Per comprendere il perché dell'ultima disuguaglianza in (30), prima si ricordi che le potenze di  $x$  sono moltiplicatori, cosicché  $x^\beta f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . D'altronde la derivata di una funzione di prova è ancora una funzione di prova, e la disuguaglianza segue dal fatto che, come provato nel teorema sull'iniezione iniezione  $i_p : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ , si ha  $\|uA\|_1 < \infty, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , quindi, in particolare,  $D_x^\alpha (x^\beta f(x)) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Finalmente, per dimostrare che la trasformata di Fourier è un'applicazione continua da  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dimostriamo l'affermazione equivalente, ovvero che  $\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta}$  è maggiorata da una combinazione lineare finita delle norme di  $f$ . Consideriamo il caso  $n = 1$ . Si ha

$$\begin{aligned}\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta} &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |D_x^\alpha (x^\beta f(x))| \frac{1+x^2}{1+x^2} dx \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_x |D_x^\alpha (x^\beta f(x))(1+x^2)| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx ,\end{aligned}\tag{31}$$

che corrisponde alla maggiorazione richiesta visto che l'ultimo membro altri non è che la combinazione lineare  $\sum_{\gamma \leq 2+\beta, \delta \leq \alpha} c_{\gamma,\delta} \|f\|_{\gamma,\delta}$ , dove i coefficienti  $c_{\gamma,\delta}$  sono numeri finiti. Ciò mostra che le norme di  $\hat{f}$  sono limitate dalle norme di  $f$ . Grazie ad un teorema generale, questo garantisce che la trasformata di Fourier è un'applicazione continua da  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Va osservato che, al contrario di Eq.(31), Eq.(30) non è sufficiente per dimostrare la continuità della trasformata di Fourier. La dimostrazione nel caso di  $\mathcal{F}^{-1}$  è analoga.

Enunciamo ora alcuni importanti teoremi che mostrano come, nell'ambito della trasformata di Fourier, lo spazio  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  sia privilegiato. Come vedremo più avanti, anche lo spazio duale, cioè  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  soddisfa proprietà del tutto analoghe nel caso se ne consideri le proprietà sotto trasformata di Fourier.

**Teorema 6. Teorema di Fourier.** *La trasformata di Fourier  $T_{\mathcal{F}}$  è una biiezione da  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*

$$T_{\mathcal{F}} T_{\mathcal{F}}^{-1} = T_{\mathcal{F}}^{-1} T_{\mathcal{F}} = I ,$$

cioè  $\check{\hat{f}} = \hat{\check{f}} = f$ .

Un altro importante teorema riguarda la trasformata di Fourier di elementi in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Benché risultino proprietà analoghe a quelle soddisfatte dello spazio  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , va sottolineato che nel caso di  $L^2(\mathbb{R}^n)$  non vale in generale la definizione (29), bensì una sua estensione che non consideremo qui. Enunciamo comunque il seguente teorema.

**Teorema 7. Teorema di Plancherel.** *La trasformata di Fourier  $T_{\mathcal{F}}$  può essere estesa ad un operatore unitario da  $L^2(\mathbb{R}^n)$  a  $L^2(\mathbb{R}^n)$  cioè si ha l'estensione  $T_{\mathcal{F}} : L^2 \rightarrow L^2$  ed è tale che  $T_{\mathcal{F}} : f \mapsto \hat{f}$  è biiettiva e  $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ .*

La trasformata di Fourier (29) si applica comunque allo spazio  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . In particolare, si ha il seguente teorema.

**Teorema 8. Riemann-Lebesgue.** *La trasformata di Fourier si estende ad un'applicazione non suriettiva  $L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$  data da*

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ipx} f(x) d^n x ,$$

con  $\lim_{|p| \rightarrow \infty} |\hat{f}(p)| = 0$ .

Enunciamo infine un'importante proprietà che connette la trasformata di Fourier del prodotto tra due elementi di  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  con la convoluzione delle rispettive trasformate di Fourier e, viceversa, la trasformata di Fourier della loro convoluzione con il prodotto delle loro trasformate di Fourier.

**Teorema 9.** *Se  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , allora*

$$\begin{aligned} \widehat{fg}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (\hat{f} * \hat{g})(p) , \\ \widehat{(f * g)}(p) &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(p) \hat{g}(p) . \end{aligned}$$

Analoghe relazioni valgono nel caso dell'antitrasformata di Fourier.

### 3.1 Trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate

Mostriamo ora che è possibile definire anche la trasformata di Fourier di distribuzioni temperate. Per semplicità, consideriamo il caso delle distribuzioni temperate regolari, l'estensione a qualsiasi distribuzione temperata è immediata. Per ogni  $f, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si ha

$$\begin{aligned} (\hat{f}, u) &= \int \hat{f}(p) u(p) d^n p = \int \hat{f}(p) \check{u}(p) d^n p \\ &= \int \hat{f}(p) \int \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^{n/2}} \hat{u}(x) d^n x d^n p . \end{aligned}$$

D'altronde,  $f, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  implica  $f, u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , per cui, per il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} (\hat{f}, u) &= \int \left( \int \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \hat{f}(p) e^{ipx} d^n p \right) \hat{u}(x) d^n x \\ &= \int \check{f}(x) \hat{u}(x) d^n x \\ &= \int f(x) \hat{u}(x) d^n x , \end{aligned}$$

che mostra che la trasformata di Fourier di una distribuzione è la distribuzione della trasformata di Fourier, cioè

$$(\hat{f}, u) = (f, \hat{u}) . \quad (32)$$

Inoltre

$$(\check{f}, u) = (\hat{f}, \check{u}) = (f, \hat{u}) = (f, u) .$$

In accordo con il Lemma 1, si ha che  $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Viceversa,  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se  $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Segue quindi da (32) che  $(f, \hat{u})$ , e quindi  $(\hat{f}, u)$ , è una distribuzione temperata se  $(f, u)$  è una distribuzione temperata. Ovviamente vale anche il viceversa:  $(f, u)$  è una distribuzione temperata se  $(\hat{f}, u)$  è una distribuzione temperata. Abbiamo quindi dimostrato il seguente teorema che è l'analogo per le distribuzioni temperate del Lemma 1.

**Teorema 10.** *La trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate definite da (32), è un'isomorfismo di  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  in se stesso.*

È importante osservare che il Lemma 1 e il precedente Teorema non valgono nel caso degli spazi  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  e  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . È proprio la simmetria tra lo spazio delle  $x$  e quello delle  $p$ , che segue dal Lemma 1 e dal Teorema 10, che suggerisce la definizione delle distribuzioni come funzionali su  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Tale scelta riflette la richiesta di simmetria tra lo spazio delle coordinate e dei momenti, simmetria che gioca un ruolo fondamentale in meccanica quantistica e riguarda aspetti basilari che vanno dal principio d'indeterminazione alla condizione di microcausalità nella teoria quantistica dei campi. Prima di derivare il principio d'indeterminazione, richiamiamo l'attenzione sul fatto che lo spazio  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  è sostanzialmente lo spazio dove si considerano le soluzioni delle equazioni agli autovalori relativamente alle osservabili fisiche. In particolare, le soluzioni  $\psi$  dell'equazione stazionaria di Schrödinger  $\hat{H}\psi = E\psi$ , con  $\hat{H}$  l'operatore hamiltoniano, devono appartenere a  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . In altri termini, sotto opportune condizioni di regolarità del potenziale  $V(x, y, z)$ , le soluzioni dell'equazione

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x, y, z) \right) \psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z) ,$$

dove  $\Delta$  è l'operatore laplaciano tridimensionale, sono considerate come elementi in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

### 3.2 Trasformata di Fourier e principio d'indeterminazione

Consideriamo il caso in cui  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Si ha

$$\|f\|_2^2 = \left| \|f\|_2^2 \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} |f|^2 dx \right| ,$$

ed integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \left| - \int_{\mathbb{R}} x(f\bar{f})' dx \right| = \left| -2\Re \int_{\mathbb{R}} x f \bar{f}' dx \right| \leq 2 \left| \int_{\mathbb{R}} x f \bar{f}' dx \right| \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} |x f \bar{f}'| dx \leq 2 \|x f\|_2 \|f'\|_2 . \end{aligned} \quad (33)$$

Si osservi che la prima disuguaglianza è dovuta al fatto che  $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$  si ha  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x| = |\Re z|$ . L'altra disuguaglianza è quella di Schwarz corrispondente alla disuguaglianza di Hölder quando  $p = q = 2$ . D'altronde, poiché, come visto con il teorema di Plancherel, la trasformata di Fourier è un'isometria, si ha

$$\|f'\|_2 = \|\hat{f}'\|_2 = \|p\hat{f}\|_2 .$$

Sostituendo questa relazione in Eq.(33) otteniamo

$$\|xf\|_2\|p\hat{f}\|_2 \geq \frac{1}{2}\|f\|_2^2 .$$

In modo del tutto analogo segue la relazione

$$\|(x - x_0)f\|_2\|(p - p_0)\hat{f}\|_2 \geq \frac{1}{2}\|f\|_2^2 .$$

Nel caso in cui  $f$  sia la funzione d'onda è necessario considerare la condizione di normalizzazione  $\|f\|_2 = 1$ . Inoltre, il termine  $px$  nella trasformata di Fourier deve essere riscritto per  $1/\hbar$ . Si ottiene quindi

$$\|(x - x_0)f\|_2\|(p - p_0)\hat{f}\|_2 \geq \frac{\hbar}{2} . \quad (34)$$

D'altronde

$$\|(x - x_0)f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x)(x - x_0)^2 f(x) dx ,$$

e

$$\|(p - p_0)f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{f}}(p)(p - p_0)^2 \hat{f}(p) dp ,$$

non sono altro che i quadrati delle deviazioni standard  $\Delta x$  e  $\Delta p$ , per cui (34) assume la forma canonica del principio d'indeterminazione

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} .$$

### 3.3 Esempi di trasformata di Fourier di distribuzioni temperate

Come primo esempio di trasformata di Fourier di una distribuzione consideriamo  $\hat{\delta}(u)$ .

*Esempio 2.* Eq.(32) implica la relazione

$$\hat{\delta}(u) = \delta(\hat{u}) = \hat{u}(p)_{p=0} = \hat{u}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x) dx ,$$

che riscriviamo ancor più esplicitamente

$$\hat{\delta}(u) = \delta(\hat{u}) = \delta \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} u(x) dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1, u) .$$

La notazione per la  $\hat{\delta}(u)$ , analoga a quella introdotta per  $\delta(u)$ , ovvero

$$\delta(u) = (\delta, u) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x) u(x) dx = u(0) ,$$

è  $\hat{\delta}(u) = (\hat{\delta}(p), u(p))_p$ , quindi

$$\hat{\delta}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ,$$

ovvero, simbolicamente,

$$\hat{\delta}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \delta(x) e^{-ipx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} .$$

Inoltre

$$\delta(x) = \tilde{\delta}(x) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ipx} dp ,$$

quindi

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ipx} dp .$$

Tale espressione della  $\delta(x)$ , pur simbolica, è molto utile e diffusa in letteratura.

*Esempio 3.* Consideriamo ora la trasformata di Fourier della gaussiana  $\varphi(x) = e^{-\frac{a}{2}x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $a > 0$ . Trattandosi di una funzione di prova, questa definisce a sua volta una distribuzione temperata. Grazie al Lemma 1., sappiamo che la trasformata di Fourier di  $\varphi(x)$  vista come distribuzione temperata, può essere calcolata direttamente. Tale calcolo, già svolto nell'ambito della teoria delle funzioni analitiche, mostra che tale trasformata è ancora una gaussiana

$$\hat{\varphi}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{a}{2}x^2} e^{-ipx} dx = \frac{e^{-\frac{p^2}{2a}}}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{a}{2}(x+i\frac{p}{a})^2} dx = \frac{1}{a^{1/2}} e^{-\frac{p^2}{2a}} .$$

Benché il risultato finale è formalmente identico a quello che si ottiene ignorando il corretto cambio nel cammino d'integrazione dopo aver eseguito il cambio di variabile  $y = x + i\frac{p}{a}$ , è bene ricordare che tale cammino corrisponde alla retta sul piano complesso distante  $i\epsilon$  dall'asse reale.

*Esempio 4.* Un altro esempio notevole è  $f(x) = e^{-a|x|}$ ,  $a > 0$ .

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|} e^{-ipx} dx = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} e^{-a|x|} \cos(px) dx .$$

D'altronde, integrando per parti due volte, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(px) dx &= -\frac{1}{a} e^{-ax} \cos(px) \Big|_0^{\infty} - \frac{p}{a} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin(px) dx \\ &= \frac{1}{a} - \frac{p}{a} \left[ -\frac{1}{a} e^{-ax} \sin(px) \right]_0^{\infty} - \frac{p^2}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(px) dx \\ &= \frac{1}{a} - \frac{p^2}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(px) dx , \end{aligned}$$

da cui, confrontando il membro a sinistra con l'ultimo, si ha

$$\hat{f}(p) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{a}{a^2 + p^2} .$$

*Esempio 5.* Consideriamo ora la trasformata di Fourier della  $\theta(x)$ . Questa può essere calcolata come limite della trasformata di Fourier ordinaria della funzione  $\theta(x)e^{-\epsilon x}$  nel limite  $\epsilon \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(p) &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \theta(x) e^{-ipx - \epsilon x} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} e^{-ipx - \epsilon x} dx \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{-ipx - \epsilon x}}{ip + \epsilon} \Big|_0^{\infty} \\ &= - \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{p - i0} \\ &= - \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \left( P\left(\frac{1}{p}\right) + i\pi\delta(p) \right) , \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue da (19).

*Esempio 6.* Si osservi che la trasformata di Fourier di  $P(1/x)$  è già stata calcolata durante lo studio dell'analisi complessa. Nell'ambito delle distribuzioni temperate la sua trasformata di Fourier la si può ottenere nel modo seguente. Prima osserviamo che poiché

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } |x| < \epsilon \\ 1/x & \text{per } |x| > \epsilon, \end{cases}$$

è in  $L^2(\mathbb{R})$  per  $\epsilon > 0$ , segue che  $\hat{f}_\epsilon(p)$  è ben definita. Calcolando  $\hat{f}_\epsilon(p)$  con le usuali tecniche di analisi complessa e considerando il limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , si ottiene

$$\mathcal{F}(P(1/x)) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} P \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ipx}}{x} dx = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn} p. \quad (35)$$

### 3.4 Trasformata di Fourier ed equazioni differenziali

La teoria delle distribuzioni temperate ha importanti applicazioni anche in un'ampia classe di equazioni. Il tipico esempio è l'equazione

$$xF = 0,$$

che ha in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  la soluzione non banale  $F = a\delta(x)$ , con  $a$  una costante. Similmente, si può considerare il problema agli autovalori in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$xF = x_0 F,$$

che ha soluzione

$$F = a\delta(x - x_0).$$

Infatti

$$(xF, u) = (ax\delta(x - x_0), u(x)) = (ax_0\delta(x - x_0), u(x)) = (x_0F, u(x)).$$

Tale distribuzione temperata può quindi esser considerata come l'autofunzione (o più precisamente, autofunzionale) corrispondente alla funzione d'onda (autofunzionale d'onda) che descrive una particella localizzata nel punto  $x_0$ .

Un'altra equazione che ha soluzioni non banali nell'ambito delle distribuzioni temperate è l'equazione

$$xF = 1. \quad (36)$$

Poiché

$$(xP(1/x) + xa\delta(x), u(x)) = (xP(1/x), u(x)) = P \int_{\mathbb{R}} u(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) dx = (1, u),$$

con  $a$  una costante, si ha

$$F = P\left(\frac{1}{x}\right) + a\delta(x).$$

Consideriamo ora il caso delle equazioni differenziali. Come esempio iniziale, consideriamo l'equazione relativa ad un circuito RL

$$RI + L \frac{dI}{dt} = V(t). \quad (37)$$



Un modo molto rapido di risolverla è considerare l'associata equazione per la funzione di Green  $G(t)$

$$\left(L \frac{d}{dt} + R\right)G(t-t') = (2\pi)^{1/2} \delta(t-t') . \quad (38)$$

Sia  $I^{(0)}$  soluzione dell'equazione omogenea associata a (37)

$$\left(L \frac{d}{dt} + R\right)I^{(0)}(t) = 0 .$$

Si verifica immediatamente che

$$I(t) = I^{(0)}(t) + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} G(t-t')V(t')dt' , \quad (39)$$

è soluzione della (37). Si osservi che

$$G(t-t') = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega(t-t')} \tilde{G}(\omega) d\omega .$$

Applicando l'operatore  $L \frac{dI}{dt} + R$  a  $G(t-t')$ , e ricordando che  $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} d\omega$ , la (38) implica

$$(i\omega L + R)\tilde{G}(\omega) = 1 .$$

Il gioco è fatto, basta calcolarsi l'antitrasformata di Fourier di  $(i\omega L + R)^{-1}$  e sostituirla nell'espressione (39) di  $I(t)$  (la soluzione  $I^{(0)}$  dell'equazione omogenea è immediata). Prima di far ciò è comunque pedagogicamente utile rivedere i passaggi fatti, considerando più a fondo il formalismo introdotto precedentemente, in questo modo capiremo meglio anche l'utilità dell'aver introdotto il concetto di convoluzione.

Analogamente a quanto fatto all'inizio di questa sezione nel caso dell'oscillatore armonico smorzato, sostituiamo alla corrente  $I(t)$  e alla tensione  $V(t)$  le loro espressioni in termini di trasformate  $\hat{I}(\omega)$  e  $\hat{V}(\omega)$ . Si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{I}(\omega)(R + i\omega L)e^{i\omega t} d\omega = \int_{\mathbb{R}} \hat{V}(\omega)e^{i\omega t} d\omega ,$$

ovvero

$$\hat{I}(\omega) = \frac{1}{R + i\omega L} \hat{V}(\omega) . \quad (40)$$

Una soluzione particolare di Eq.(37) è quindi data dall'antitrasformata

$$I(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{V}(\omega)}{R + i\omega L} e^{i\omega t} d\omega .$$

Si noti che il teorema 9 considerato nel caso dell'antitrasformata

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\hat{g})(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} (f * g)(t) ,$$

applicato a (40) da

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{I})(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{R + i\omega L} \hat{V}(\omega)\right)(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} (G * V)(t) ,$$

cioè

$$I(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(G * V)(t) ,$$

dove

$$G(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{R + i\omega L}\right) = \theta(t)\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} , \quad (41)$$

che, come già accennato, è detta funzione di Green del sistema. Si noti che il calcolo dell'antitrasformata (41) segue immediatamente considerando l'antitrasformata della trasformata di Fourier di  $\theta(t)e^{-\epsilon t}$  in (35) con  $\epsilon = R/L$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}L} \int_{\mathbb{R}} \theta(t)e^{-(R/L)t} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{R + i\omega L} .$$

In generale la funzione di Green, divisa per  $(2\pi)^{n/2}$ , è la soluzione dell'equazione differenziale lineare il cui termine non omogeneo è sostituito dalla distribuzione  $\delta$ .

Consideriamo ora la seguente equazione differenziale

$$\dot{y} = f(t) , \quad (42)$$

dove  $f$  è qualche funzione non specificata. Sostituendo

$$y(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \hat{y}(\omega)e^{i\omega t} d\omega ,$$

e

$$f(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega ,$$

in (42) si ha

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{i\omega} \hat{f}(\omega) ,$$

da cui

$$\omega \hat{G}(\omega) = -i ,$$

coincidente con Eq.(36). Ponendo  $\hat{G} = -iF$  si ha quindi

$$\hat{G}(\omega) = -iP\left(\frac{1}{\omega}\right) + a\delta(\omega) ,$$

con  $a$  una costante arbitraria. Segue da (35) che

$$G(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \hat{G}(\omega)e^{i\omega t} d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn} t + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{2\pi}\theta(t) + c ,$$

con  $c$  una costante arbitraria. Tale risultato era immediatamente ottenibile ricordando che la funzione di Green è  $(2\pi)^{n/2}$  volte la soluzione dell'equazione differenziale lineare il cui termine non omogeneo è sostituito dalla distribuzione  $\delta$ . Quindi, nel caso di (42)

$$\dot{G} = (2\pi)^{1/2}\delta(t) .$$

Consideriamo l'equazione differenziale del secondo ordine

$$\ddot{y} + y = f(t) .$$

Procedendo nel modo analogo ai casi precedenti, si ottiene

$$(-\omega^2 + 1)\hat{G}(\omega) = 1 .$$

Si ha

$$G(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t + (2\pi)^{1/2}\theta(t) \sin t ,$$

che infatti soddisfa l'equazione

$$\ddot{G} + G = (2\pi)^{1/2}\delta(t) .$$

Un'equazione di considerevole interesse fisico è l'equazione di Poisson soddisfatta dal potenziale elettrostatico

$$\Delta V = -4\pi\rho . \quad (43)$$

Mostriamo che effettivamente

$$V(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x')}{|x - x'|} d^3x' , \quad (44)$$

è la ben nota soluzione di (43). Riscrivendo (44) nella forma

$$V(x) = \left(\frac{1}{|x|} * \rho\right)(x) ,$$

si evince che

$$G = \frac{(2\pi)^{3/2}}{|x|} . \quad (45)$$

Quindi, per mostrare che (44) è soluzione di (43), è sufficiente verificare che (45) è la funzione di Green del laplaciano, a parte una costante moltiplicativa, cioè

$$\Delta \frac{1}{|x|} = -4\pi\delta(x) .$$

Infatti, sostituendo

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{G}(p) e^{ipx} d^3p ,$$

nell'equazione che definisce la funzione di Green

$$\Delta G = -2(2\pi)^{5/2}\delta(x) ,$$

si ha

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} p^2 \hat{G}(p) e^{ipx} d^3p = \frac{2(2\pi)^{5/2}}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ipx} d^3p ,$$

cioè

$$\hat{G}(p) = \frac{4\pi}{p^2} .$$

Quindi

$$G(x) = \frac{2}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{p^2} e^{ipx} d^3p .$$

Utilizzando le coordinate sferiche si ha

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{p^2} e^{ipx} d^3p = 2\pi \int_0^\infty dp \int_0^\pi e^{ipr \cos \theta} \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty \frac{\sin(pr)}{p} dp = \frac{2\pi^2}{r} ,$$

$r = |x|$ , che riproduce (45).

Accenniamo infine brevemente all'equazione di Klein-Gordon. Questa è di notevole interesse fisico e verrà studiata in dettaglio, tra l'altro, nei corsi di teoria quantistica dei campi

$$(\square + m^2)\phi(x) = j(x) .$$

Molte equazioni dinamiche della teoria dei campi hanno questa struttura. In particolare, l'equazione di Klein-Gordon è la naturale generalizzazione dell'equazione di Schrödinger libera per una particella scalare, cioè di spin zero. La funzione  $j(x)$  è vista come una corrente esterna data e  $m$  denota la massa. L'operatore  $\square + m^2$  corrisponde alla relazione relativistica  $p^\mu p_\mu - m^2 c^4 = 0$  una volta che  $p_\mu$  è sostituito da  $-i\hbar\partial_\mu$  e si è posto, come usuale in teoria dei campi quantistici,  $\hbar = 1$  e  $c = 1$ . Consideriamo la funzione di Green  $G(x - x')$  per l'equazione di Klein-Gordon

$$(\square + m^2)G(x - x') = (2\pi)^2\delta(x - x') .$$

È immediato verificare che soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon sono generate da

$$\phi(x) = \phi^{(0)}(x) + \frac{1}{(2\pi)^2} \int G(x - x')j(x')d^4x' ,$$

dove

$$(\square + m^2)\phi^{(0)} = 0 .$$

Esprimiamo ora  $G(x - x')$  in termini della sua trasformata di Fourier

$$G(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{ip \cdot (x - x')} \tilde{G}(p) d^4p .$$

Applicando  $\square + m^2$  a quest'ultima espressione si ha

$$(-p^2 + m^2)\tilde{G}(p) = 1 .$$

Per la successiva analisi rimandiamo ad uno dei numerosi testi sull'argomento. Un'analisi sistematica e approfondita la si può trovare nell'eccellente monografia di Bogoliubov e Shirkov, *Introduction to the theory of Quantized Fields*, disponibile gratuitamente sul WEB.