Campo magnetico generato da corrente (Legge di Biot-Savart)

L'idea è di utilizzare lo stesso procedimento utilizzato per il calcolo di un campo elettrico generato da una distribuzione di cariche qualunque:

Si divide la carica totale in elementi infinitesimi dq e si calcola il campo elettrico dE prodotto da dq nel punto generico P:

Il modulo vale

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

dove r è la distanza tra dq e il punto P

In forma vettoriale

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^3}\vec{r}$$

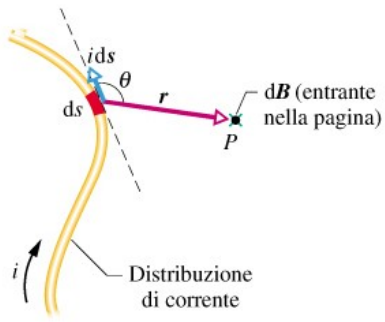
N.B. In questo formato si vede direttamente dall'equazione che la direzione di E coincide con la direzione del vettore r congiungente la carica che forma il campo con il punto nel punto P integrando dE sull'intera regione occupata dalla carica

Infine, per la proprietà di sovrapposizione, si calcola **E** nel punto P integrando d**E** sull'intera regione occupata dalla carica

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{dq}{r^3}\vec{r}$$

Procediamo in maniera analoga con il campo magnetico **B**.

Suddividiamo il filo percorso da corrente i in elementi differenziali $d\vec{s}$ il cui modulo è la lunghezza ds, la direzione è quella tangente al filo e il verso è quello di scorrimento della corrente.



Il prodotto $i\,d\vec{s}$ è un elemento di *corrente x lunghezza* (vettore e non scalare come la carica dq del campo elettrico)

L'intensità del campo magnetico dB in P, distante r da $i\,d\vec{s}$ varrà:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\sin\theta}{r^2}$$

dove θ è l'angolo tra le direzioni di $d\vec{s}$ e di **r.**

μ_0è detta costante di **permeabilità magnetica nel vuoto** e vale:

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\, T\cdot m/A \approx 1.26\cdot 10^{-6}\, T\cdot m/A$$

Forma vettoriale

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\sin\theta}{r^2}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}$$

Legge di Biot-Savart in forma differenziale

Direzione di B ? Perpendicolare al piano individuato da $d\vec{s}$ e $\vec{r}$

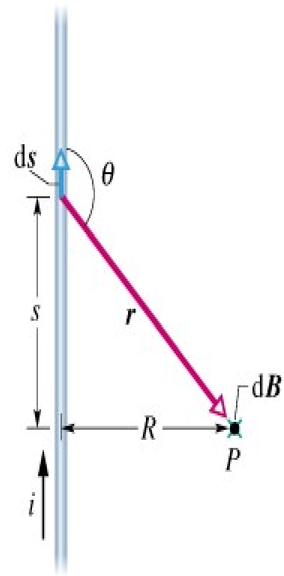
Verso di B ? Regola della mano destra applicata a $d\vec{s}$ e $\vec{r}$

Il campo totale B si ottiene, in base al principio di sovrapposizione, integrando lungo il filo:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{i\,d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}$$

Legge di Biot-Savart in forma integrale.

Campo B generato da corrente che scorre in un lungo filo rettilineo



Da Biot-Savart: $$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{i\, d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}$$

Consideriamo il modulo:

$$B=\int_{-\infty}^{\infty} dB = 2\int_0^{\infty} dB = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\theta}{r^2}\,ds$$

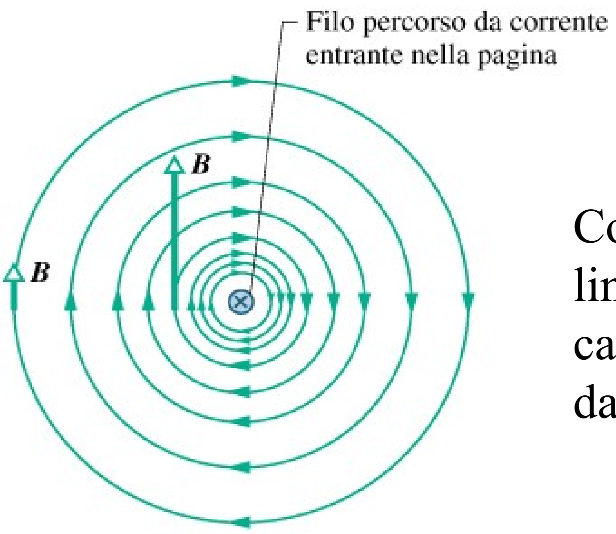
Del resto: $$r=\sqrt{s^2+R^2}, \quad \sin\theta=\sin(\pi-\theta)=\frac{R}{\sqrt{s^2+R^2}}$$

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{R}{(s^2+R^2)^{3/2}}\,ds=\frac{\mu_0 i}{2\pi}\left[\frac{s}{(s^2+R^2)^{1/2}}\right]_0^{\infty}=\frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$ Filo rettilineo infinito

$$B=\frac{\mu_0 i}{4\pi R}$$ Filo rettilineo semi-infinito

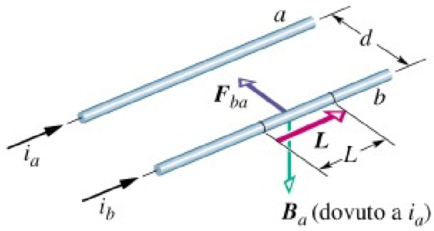
Le linee di forza del campo magnetico generato da un lungo filo rettilineo percorso da una corrente i sono circonferenze concentriche che vivono su piani perpendicolari al filo.
Il verso è dato dal verso di rotazione della vite che segue il verso della corrente.



Confronta con le linee di forza di un campo elettrico generato da una carica puntiforme

Forza tra due fili conduttori paralleli

Due fili lunghi e paralleli percorsi da correnti esercitano forze uno sull'altro. Se le **due correnti** hanno lo **stesso verso** i fili si **attraggono** altrimenti si respingono.



Caso 1: forza esercitata su b da a

La corrente in a genera un campo magnetico, orientato verso il basso,che, a distanza d, ha modulo

$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$$

Dato il campo magnetico B_a, la forza agente sul filo b è da da:

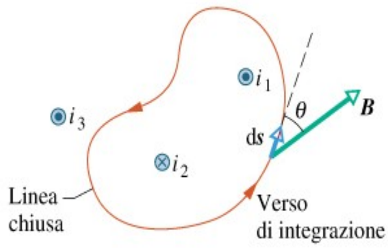
$$\vec{F}_{ba} = i_b \vec{L} \times \vec{B}_a ,$$

Dove L è il vettore lunghezza relativo al filo b orientato come i_b

$$\boxed{|\vec{F}_{ba}| = i_b L |B_a| \sin(90^o) = \frac{\mu_0 L i_b i_a}{2\pi d} ,}$$

Legge di Ampere (circuitazione di B)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B \cos\theta \, ds = \mu_0 i_{ch}$$

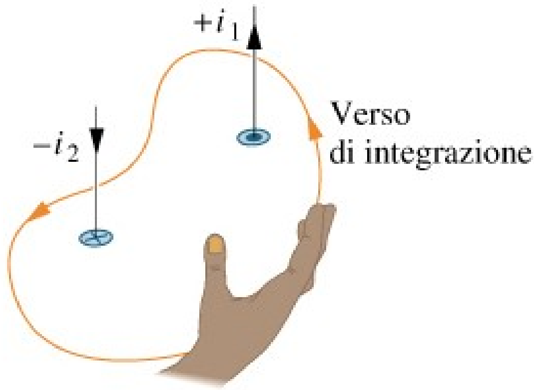


i_{ch} è la corrente netta che fluisce attraverso la superficie racchiusa dalla linea chiusa.

Il verso di ds (di direzione tangente alla curva) può essere quello del verso d'integrazione. Per assegnare i segni algebrici delle correnti che attraversano la superficie si opera nel modo seguente:

Si curvano le dita della mano destra attorno alla linea chiusa nel verso d'integrazione. A una corrente passante attraverso la superficie nel verso indicato dal pollice teso viene assegnato il segno più e alla corrente che scorre nel senso opposto viene assegnato il segno meno.

Caso di due fili che attraversano la superficie delimitata dalla curva chiusa.



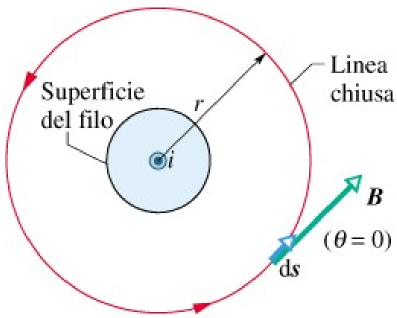
In questo caso: $i_{ch} = i_1 - i_2$

La legge di Ampere diventa:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B \cos\theta \, ds = \mu_0 (i_1 - i_2)$$

N.B: Nei casi in cui l'integrale sul cammino chiuso sia calcolabile analiticamente, la legge di Ampere permette di esprimere il campo B in funzione delle correnti che lo generano.

Campo magnetico all'esterno di un filo rettilineo infinito percorso da corrente.



Percorso chiuso: circonferenza di raggio r. Tale percorso coincide con le linee del campo B.

Pertanto B e ds sono paralleli, cioè θ=0

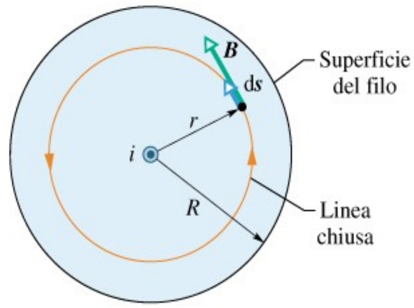
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B \cos\theta \, ds = B \oint ds = B(2\pi r),$$

Dalla Legge di Ampere: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i,$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}}$$

Si ritrova la Legge di Biot Savart per un filo rettilineo percorso da corrente i.

Campo magnetico all'interno di un filo rettilineo infinito percorso da corrente.



Percorso chiuso: circonferenza di raggio r interna al filo di raggio R. Corrente uniformemente distribuita nella sezione del filo.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \oint B\cos\theta\, ds = B\oint ds = B(2\pi r),$$

del resto $\quad i_{ch} = i\dfrac{\pi r^2}{\pi R^2}$ $\quad \xrightarrow{\text{Ampere}} \quad$ $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{ch} = \mu_0 i \dfrac{\pi r^2}{\pi R^2}$

$$\boxed{B = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi R^2}\right) r}$$

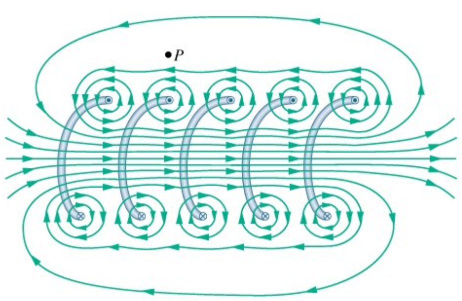
Campo magnetico di un solenoide

Solenoide: lungo filo avvolto a spirale

Si assume che le lunghezza del solenoide sia maggiore del diametro della spira

Dalla legge di Ampere si ha: $\quad B = \mu_0 i n$

n è il numero di spire nel solenoide ***per unità di lunghezza***.



Linee del campo magnetico generato da un solenoide. (Visione dall'alto). All'interno del solenoide B è praticamente uniforme !!!

Esercizi Halliday

1E, 4E, 16P, 22E, 28E, 29E, 30E , 38E (quinta edizione Capitolo 30)

2, 3, 13, 14, 18, 19, 21,24 (sesta edizione Capitolo 29)

Problemi svolti:

30.2, 30.4 (quinta edizione)
29.2,29.4 (sesta edizione)