Meccanica

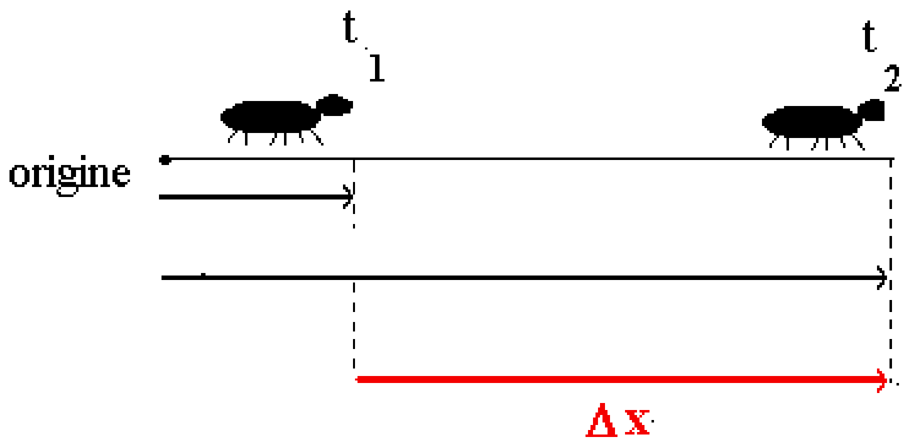
E' il settore della fisica che si occupa del moto degli oggetti e delle forze che provocano il cambiamento di tale moto.

Cinematica Si occupa di descrivere il moto senza riferirsi alle forze che lo hanno provocato.

Dinamica Si occupa delle forze che agiscono su un oggetto e degli effetti che hanno sul suo moto.

Cinematica unidimensionale

Formica che parte, al tempo t_1 dal formicaio posto in x_1 ed arriva, al tempo t_2, ad una sorgente di cibo posta in x_2.



Lo spostamento effettuato dalla formica nell'intervallo di tempo t_2-t_1 è definito come:

$$\Delta x \equiv x(t_2) - x(t_1) \equiv x_2 - x_1$$

Unità di misura dello spostamento nel SI:

metro (m) *Unità di misura fondamentale*.

Velocità media di un moto generico

$$velocita'\,media = \frac{spostamento}{tempo\;impiegato}$$

$$\bar{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Unità di misura della velocità media nel SI:
metro/secondo (ms^{-1})

N.B. La velocità media appena definita è spesso chiamata velocità media vettoriale.

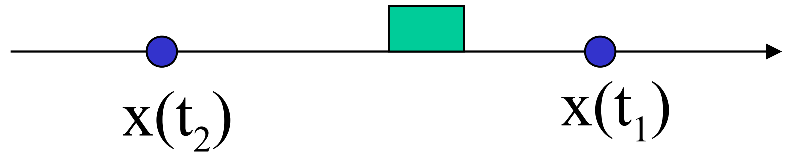
Può essere infatti vista come un vettore avente come
direzione la direzione dell'asse x,
verso il segno di Δx e
modulo il valore assoluto di Δx, cioè $|\Delta x|$.

Se per esempio $x(t_2) < x(t_1)$ il corpo si muoverà verso gli x negativi dell'asse.

Essendo x < 0 la velocità media avrà in questo caso un verso negativo.

N.B : Per convenzione si assume $t_2 > t_1$

Esempio:



Nell'intervallo di tempo $t = t_2 - t_1 = 10\ s$ l'oggetto è passato dal punto $x(t_1) = 10\ m$ al punto $x(t_2) = 3\ m$.

Quindi la velocità media sarà

$$\bar{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = -\frac{7\,m}{10\,s} = -0.7\,m/s$$

Esempio

Supponiamo che lo spostamento sia $x = 30m$.
Alla formica occorrono 20 minuti (1200s) per coprire tale distanza.

Qual'è la sua velocità media ?

Velocità media = distanza percorsa / tempo impiegato

$= 30m / 1200s = 2.5 \times 10^{-2}\ ms^{-1}$.

Posizione in funzione del tempo

La posizione di un oggetto nel tempo può essere descritta tracciando il grafico della sua posizione x in funzione del tempo t esprimendo cioè la funzione x(t) (**legge oraria**).

La curva x(t) **non è la traiettoria** dell'armadillo che è invece rappresentata dal segmento in basso.

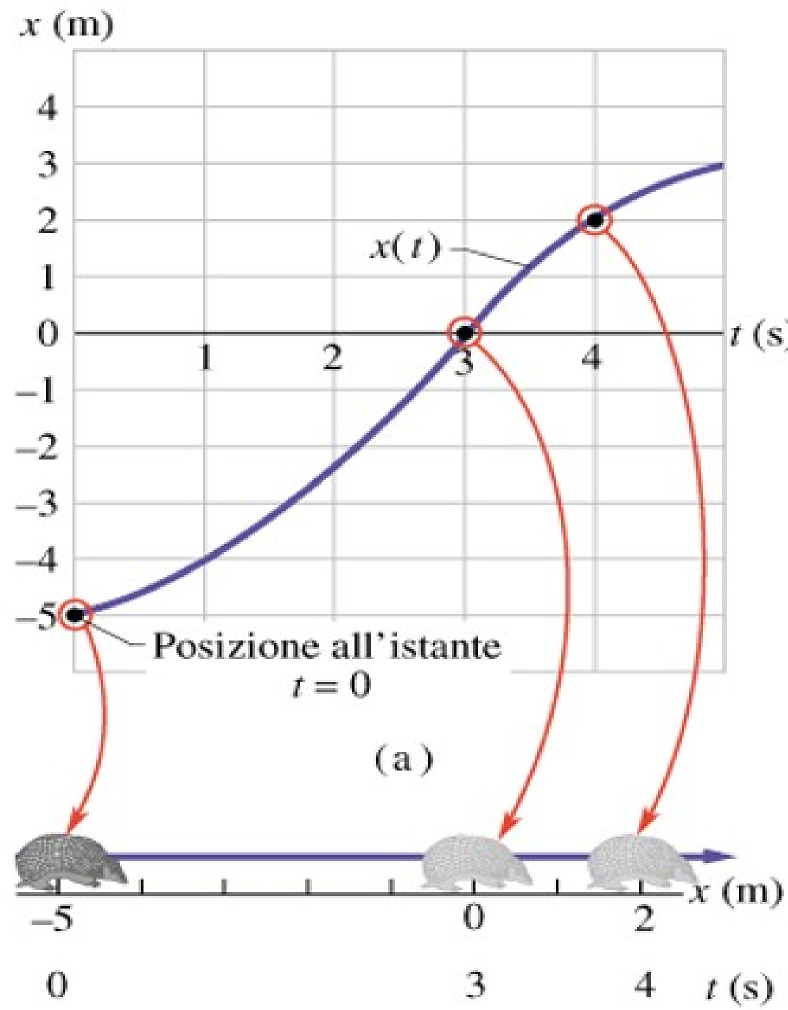


Figura tratta da Hallyday et al. pag13

Velocità istantanea

Dire, per esempio, che dopo un lungo viaggio, la nostra velocità media sia stata pari 20 m/s non dà alcuna informazione sulla rapidità a cui ci siamo mossi a ogni istante del viaggio. Ci saranno stati istanti a cui abbiamo viaggiato a una rapidità maggiore ed altri a rapidità minore. Per una conoscenza completa del moto si deve conoscere la velocità ad ogni istante t.

La velocità in qualunque istante si ottiene dalla velocità media restringendo l'intervallo di tempo t in modo che si avvicini sempre più a zero:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{dx(t)}{dt}$$

Velocità istantanea come derivata prima (rispetto al tempo) della legge oraria x(t).

Moto rettilineo uniforme

Un **moto rettilineo** si dice **uniforme** se durante il moto la velocità istantanea rimane **costante** (non dipende dal tempo).

$$v(t) = cost \equiv v$$

In un moto rettilineo uniforme la velocità istantanea e quella media coincidono per ogni spostamento x e intervallo di tempo t.

$$v(t) = v = \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Legge oraria del moto uniforme

Se sappiamo che un corpo si muove di moto rettilineo uniforme, possiamo calcolare la sua velocità facendo il rapporto tra un x qualsiasi e il suo corrispondente t.

Se invece conosciamo la velocità, come si fa per sapere quale distanza viene percorsa in un determinato intervallo di tempo ?

Dalla $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ si ha $\Delta x=v\,\Delta t$

Se con x_0 indichiamo la posizione iniziale (x_1) e con x quella finale (x_2):

$$\Delta x \equiv x(t)-x(t_0)=v\,\Delta t \equiv v(t-t_0)$$

Legge oraria del moto rettilineo uniforme

$$x(t)=x(t_0)+v(t-t_0)$$

Nel moto rettilineo uniforme **x(t)** è una **funzione lineare di t**.

Esempio 1: volo gabbiano

Quanti minuti impiegherebbe un gabbiano per attraversare il canale che divide la Sicilia dall'Africa (145km) se si muovesse di moto rettilineo uniforme alla velocità di 40 km/h ?

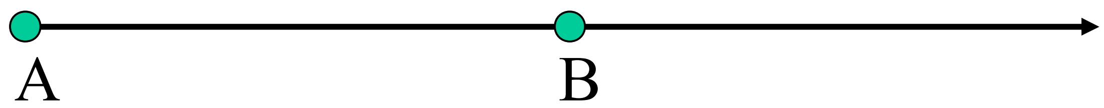
Soluzione

Dalla relazione $\Delta x = v \Delta t$ si ottiene $\Delta t = \dfrac{\Delta x}{v}$

Quindi

$$\Delta t = \frac{1.45 \times 10^2\, km}{4 \times 10\, \dfrac{km}{h}} = 3.6 \times 60\, min = 216\, min$$

Esempio 2: automobile che raggiunge motorino



Un motorino, a partire dal punto B, si muove con velocità costante di 30km/h verso destra.

L' Automobile a partire dal punto A, (a sinistra di B e a distanza da B pari a 10km) si muove con velocità costante di 80km/h seguendo il percorso del motorino.

Dove, e dopo quanto tempo, l'automobile raggiungerà il motorino?

Accelerazione

Quando la velocità di un oggetto varia si dice che l'oggetto è sottoposto a un'**accelerazione**. Per il moto lungo un'asse **l'accelerazione media** $\bar{\mathbf{a}}$ durante un intervallo di tempo Δt si definisce:

$$\bar{a} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

L'accelerazione istantanea è la derivata prima della velocità rispetto al tempo.

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \equiv \frac{dv(t)}{dt}$$

L'accelerazione nel sistema SI ha come unità il metro su secondo quadrato: m/s^2

N.B.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

L'accelerazione in un certo istante è la **derivata seconda** della sua posizione x(t) rispetto al tempo.

Segno dell'accelerazione

L'accelerazione è positiva quando è diretta nel verso positivo dell'asse, negativa nel caso opposto.

Attenzione al significato del segno !!!

Il segno dell'accelerazione non vuol sempre dire che l'oggetto sta aumentando o diminuendo la sua velocità !

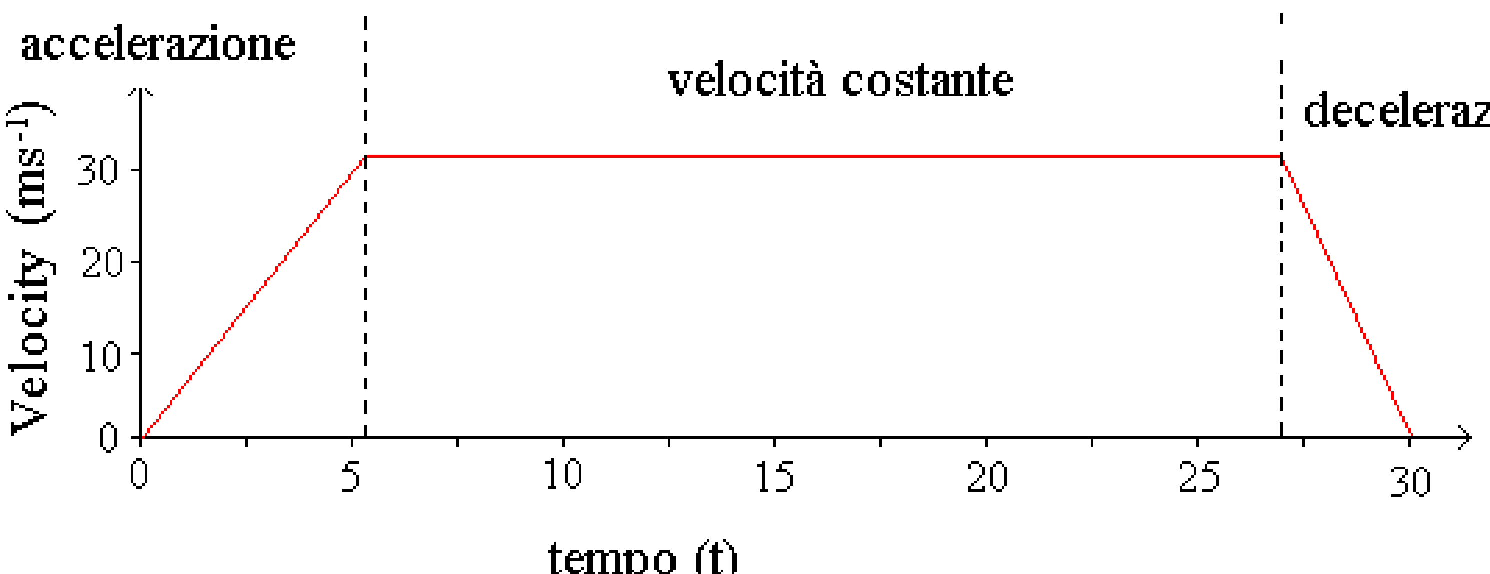
Se un'automobile con velocità iniziale **v**=-25m/s viene frenata fino all'arresto in 5.0 s, risulta **a**=+5.0m/s^2: l'accelerazione è **positiva** ma la macchina ha rallentato !!!!!

Se i segni di velocità e accelerazione sono concordi ➔ l'oggetto sta aumentando la sua velocità, se i segni sono opposti l'oggetto rallenta.

Esempio: accelerazione media

Un ghepardo può accelerare da fermo alla sua velocità massima (30.6ms^{-1}) in 5 secondi. Qualè la sua accelerazione media?

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{30.6\, ms^{-1} - 0\, ms^{-1}}{5\mathrm{s}} = 6.1\, m\, s^{-2}$$



Moto uniformemente accelerato

Un moto si dice uniformemente accelerato se durante il moto **l'accelerazione istantanea** rimane **costante**.

$$a(t) = cost \equiv a$$

In un moto uniformemente accelerato l'accelerazione istantanea e quella media coincidono per ogni v e intervallo di tempo t.

$$\Rightarrow \quad a(t) = a = \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Se un corpo si muove di moto uniformemente accelerato, possiamo calcolare la sua accelerazione facendo il rapporto tra un v qualsiasi e il suo corrispondente t.

Velocità in un moto uniformemente accelerato

Se conosciamo l'accelerazione di un moto uniformemente accelerato, possiamo calcolare la **velocità** in un determinato intervallo di tempo.

Infatti $a(t) = \text{cost} = a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ e quindi $\Delta v = a\,\Delta t$

Se con v_0 indichiamo la velocità iniziale (v_1) e con v quella finale (v_2):

$$\Delta v \equiv v(t) - v(t_0) = a\,\Delta t = a(t - t_0)$$

$$v(t) = v(t_0) + a(t - t_0)$$

Nel moto uniformemente accelerato la velocità **v(t)** è una **funzione lineare di t**.

Legge oraria nel moto uniformemente accelerato

Per un moto uniformemente accelerato: $$v(t)=v(t_0)+a(t-t_0) \qquad (2.11)$$

Del resto, dalla definizione di velocità media si ha:

$$\bar{v}=\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} \quad \text{e quindi} \quad x(t)=x(t_0)+\bar{v}(t-t_0) \qquad (2.12)$$

Poiché la velocità è lineare in t (2.11), la velocità media in qualunque intervallo di tempo (per esempio tra $t=t_0$ e un generico istante successivo t, è data dalla media fra la velocità istantanea in t_0, e la velocità istantanea in t.

$$\Rightarrow \quad \bar{v}=\frac{1}{2}\left(v(t_0)+v(t)\right) \qquad (2.13)$$

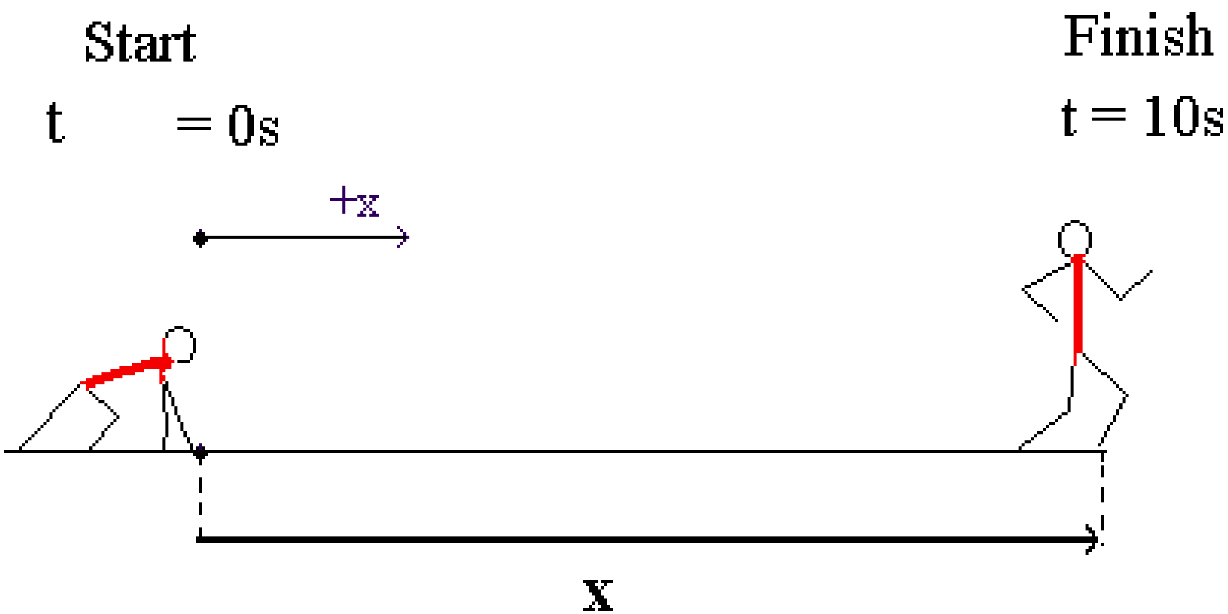
Sostituendo a v l'espressione (2.11) si ha $\bar{v}=v(t_0)+\frac{1}{2}a(t-t_0)$

che sostituita in (2.12): $$x(t)=x(t_0)+v(t_0)\left(t-t_0\right)+\frac{1}{2}a\left(t-t_0\right)^2$$

Legge oraria del moto uniformememte accelerato

Consideriamo la corsa dei 100m

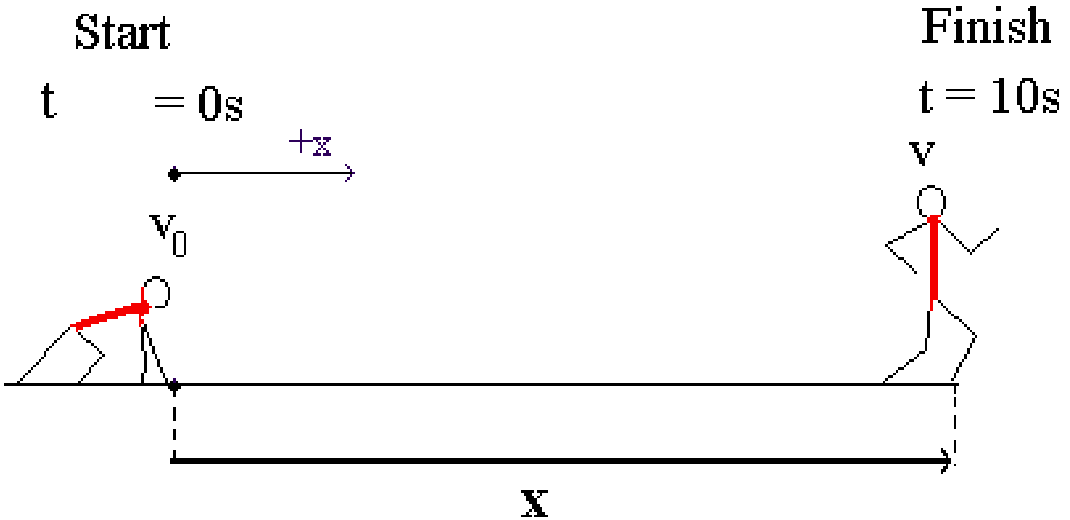
Poniamo l'origine sulla linea di partenza



Posizione iniziale $x_0 = 0\text{m}$

Posizione finale $x_f = +100\text{m}$

Velocità media



Velocità iniziale

$v_0 = 0 \ ms^{-1}.$

Velocità media $$\bar{v} = \frac{x(t_f) - x(t_0)}{t_f - t_0} = \frac{100\,m}{10\,s} = 10\,m\,s^{-1}$$

Verso pari al segno di $x_f - x_0$.

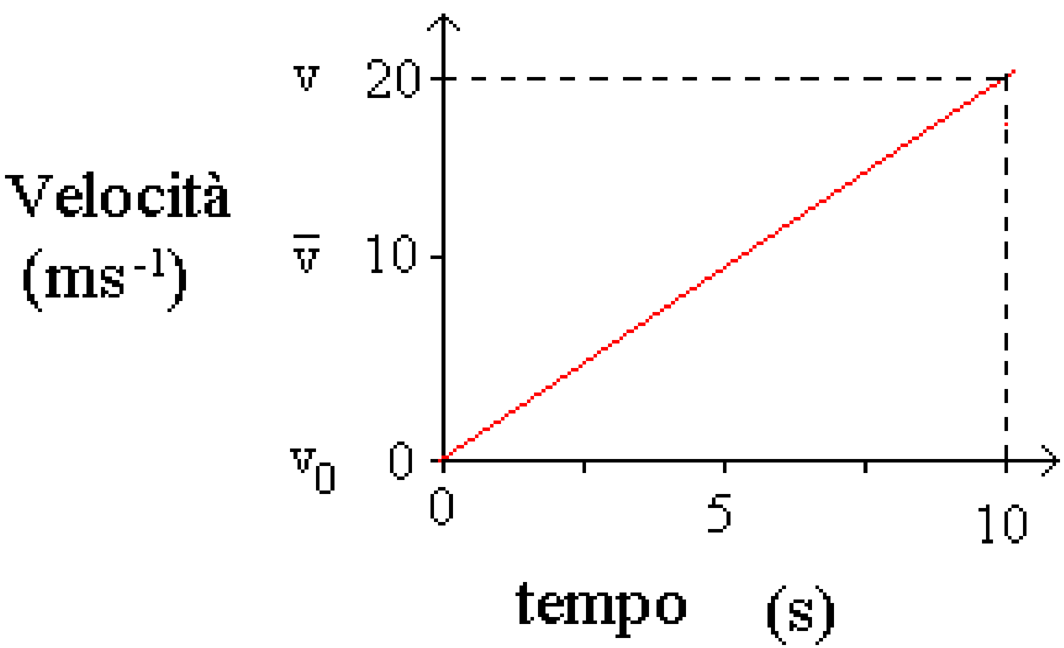
Velocità media e velocità finale

Poichè assumiamo accelerazione costante v(t) è lineare in t e vale la (2.13) per la velocità media:

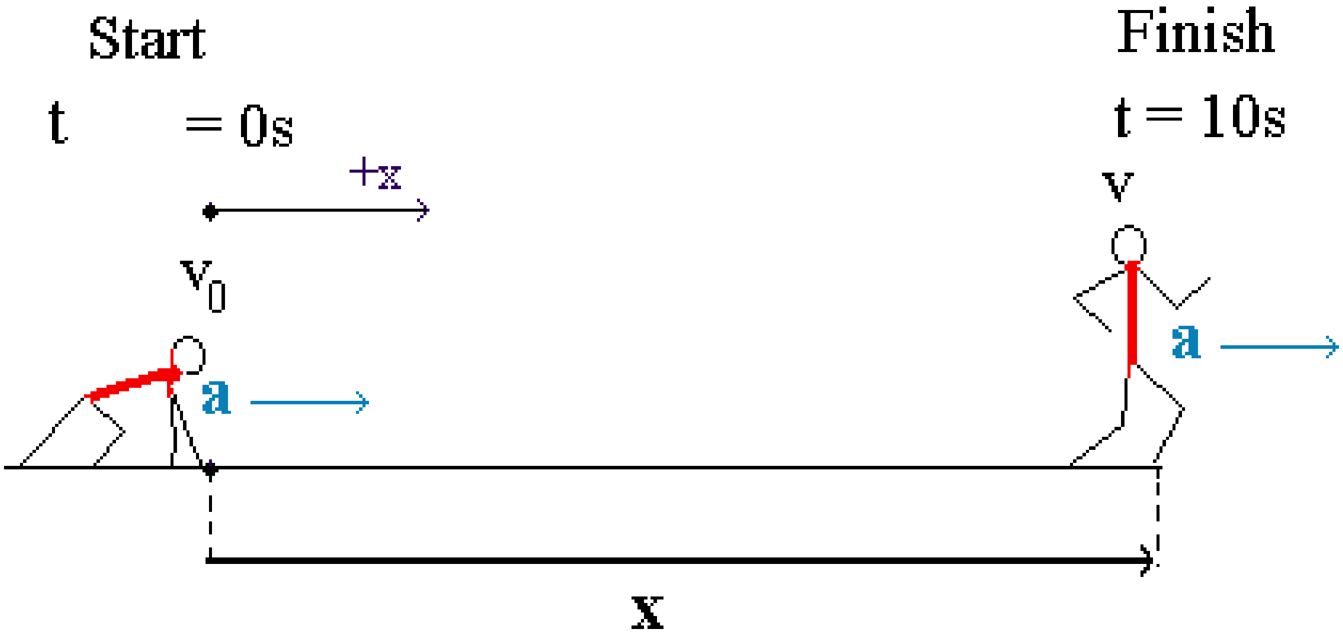
$$\bar{v} = \frac{v(t_0) + v(t_f)}{2}$$

Risolvendo per la velocità finale:

$$v(t_f) = 2\bar{v} - v(t_0) = 2(10\,ms^{-1}) - 0\,ms^{-1} = 20\,m\,s^{-1}$$



Accelerazione



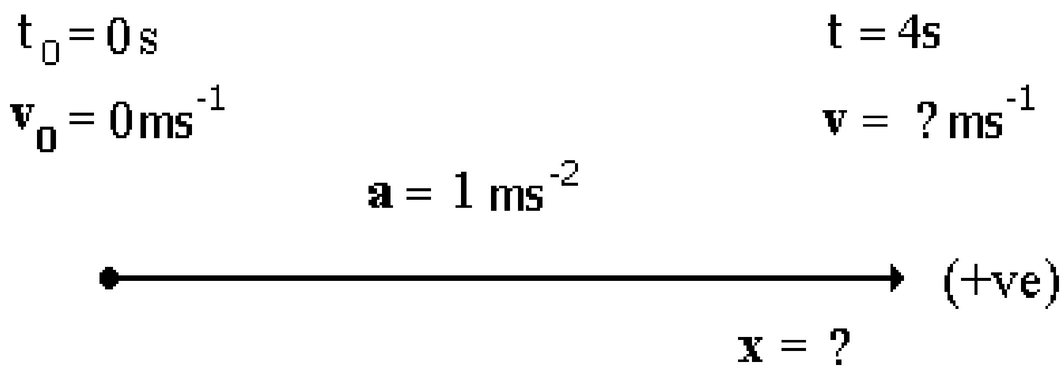
Essendo il moto uniformemente accelerato l'accelerazione è costante e si può ottenere dalla definizione di accelerazione media: ➔

$$a = \frac{v(t_f) - v(t_0)}{t_f - t_0}$$

$$a = \frac{20\,m/s - 0m/s}{10s} = 2\,m\,s^{-2}$$

Esempio 1

Un rinoceronte carica da fermo e accelera a 1 ms^{-2}. Dopo 4 secondi qual'è (a) la sua velocità e (b) il suo spostamento finale? Assumere un moto uniformemente accellerato.



(a) Usare equazione

$$\boldsymbol{v(t) = v(t_0) + a\,(t-t_0)}$$

$$= 0ms^{-1} + (1ms^{-2})(4s-0s) = 4ms^{-1}$$

(b) Usare equazione

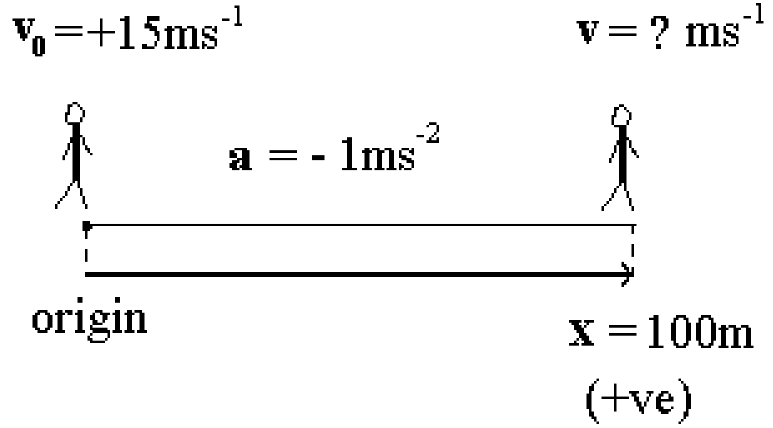
$$\boldsymbol{x(t) = v(t_0)\,(t-t_0) + 1/2\, a(t-t_0)^2}$$

$$= (0ms^{-1})(4s-0s) + 1/2\,(1ms^{-2})(4s-0s)^2$$

$$= 1/2(1ms^{-2})(16s^2) = 8m$$

Esempio 2

Una persona che corre i 100m ha una velocità iniziale pari a 15 ms^{-1} e decelera uniformemente a $-1ms^{-2}$ durante i 100m. Qual'è la velocità finale della persona?



x	a	v	v_0	t
100m	-1ms-2	?	15 ms-1	?

$$v(t) = v(t_0) + a\,(t-t_0) \qquad t_0=0 \qquad \Rightarrow \qquad v(t_f) = v(t_0) + a\,t_f$$

$$x(t) = v(t_0)\,(t-t_0) + 1/2\, a(t-t_0)^2 \qquad t=t_f \qquad\qquad x(t_f) = v(t_0)t_f + 1/2\, at_f^2$$

Elevando al quadrato al prima equazione: $v^2(t_f) = v^2(t_0) + 2v(t_0)at_f + a^2 t^2_f$

e sostituendovi il t_f^2 ricavato dalla seconda si ottiene:

$$v^2(t_f) = v^2(t_0) + 2\,a\,x(t_f) = (15\ ms^{-1})^2 + 2(-1ms^{-2})(100m)$$

$$= (225-200)m^2s^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad v = \pm 5ms^{-1}$$

Cinematica di un moto accelerato generico

Supponiamo di conoscere l'accelerazione istantanea a(t) di un moto generico.

Come si può calcolare la velocità istantanea sapendo che in $\tau=\tau_0$ $v(\tau)=v(\tau_0)$?

La definizione di accelerazione istantanea: $\frac{dv(s)}{ds}=a(s)$

Si può scrivere formalmente come: $dv(s)=a(s)\,ds$

L'integrazione formale dell'ultima equazione nell'intervallo di tempo [0,] fornisce $\int_{v(\tau_0)}^{v(\tau)} dv=\int_{\tau_0}^{\tau} a(s)\,ds$

E calcolando l'integrale a primo membro si ha:

$$v(\tau)=v(\tau_0)+\int_{\tau_0}^{\tau} a(s)\,ds$$

Velocità istantanea di moto accelerato.

Legge oraria di un moto accelerato generico

Una volta nota la velocità istantanea v(t) si può calcolare la x(t) attraverso la definizione di velocità istantanea:

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau}=v(\tau)$$

cioè $$dx(\tau)=v(\tau)\,d\tau$$

Ed integrando nell'intervallo di tempo [t_0,t]:

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau$$

Se ora inseriamo l'espressione della velocità istantanea in termini di a(s) si ottiene la legge oraria di un moto accelerato generico:

$$\begin{aligned} x(t)= & \; x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left[v(t_0)+\int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds\right]d\tau \\ = & \; x(t_0)+\int_{t_0}^{t} v(\tau_0)\,d\tau+\int_{t_0}^{t} d\tau\left(\int_{\tau_0}^{\tau} a(s)\,ds\right) \\ = & \; x(t_0)+v(t_0)(t-t_0)+\int_{t_0}^{t} d\tau\left(\int_{\tau_0}^{\tau} a(s)\,ds\right) \end{aligned}$$

Ovviamente $_0 = t_0$

Caso particolare: il moto uniformemente accelerato

In questo caso l'accelerazione istantanea è costante pertanto l'integrale

$$\int_{t_0}^{t} d\tau \left(\int_{\tau_0}^{\tau} a(s)\, ds \right) = \int_{t_0}^{t} d\tau \left(a \int_{\tau_0}^{\tau} ds \right) = a \int_{t_0}^{t} d\tau \, (\tau - t_0)$$

Integrando una seconda volta si ottiene:

$$\int_{t_0}^{t} d\tau \left(\int_{\tau_0}^{\tau} a(s)\, ds \right) = a \int_{t_0}^{t} d\tau \, (\tau - t_0) = \frac{1}{2} (t - t_0)^2$$

E quindi la legge oraria diventa:

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2$$

Che corrisponde a quella precedentemente trovata per il moto uniformemente accelerato.

Esercizi Halliday capitolo 2

3E, 6P, 12P, 20P, 21P, 27E ,29E (quinta edizione)

3, 6, 11, 14, 15, 21,24 (sesta edizione)

Guardare tutti i problemi svolti del capitolo.

Quesiti n. 1,2,3,5