Moto di un corpo in caduta libera

Esempio di moto uniformemente accelerato unidimensionale

- Le equazioni del moto uniformemente accelerato si applicano al problema della caduta libera di un corpo vicino alla superficie della terra.

- Si applica a qualunque oggetto in volo verticale sia verso il basso che verso l'alto quando gli **effetti dell'aria** possono essere **trascurati**.

Corpi in caduta libera

- La gravità fa muovere gli oggetti verso il basso
- Se si possono trascurare gli effetti della resistenza dell'aria, un corpo in caduta libera è sottoposto ad una **accelerazione di gravità g** di valore

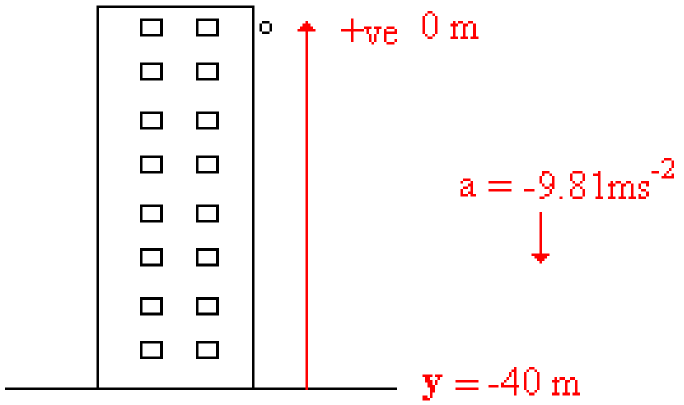
$g \sim 9.81\ ms^{-2}$ (valore al livello del mare)

- L'accelerazione dovuta alla gravità è la stessa per tutti i corpi (non dipende dalla massa) .

Galileo Galilei (1564-1642)

- Le equazioni della cinematica per il moto uniformemente accelerato si applicano al moto in caduta libera.
- La direzione del moto è collocata sull'asse verticale y con il verso positivo verso l'alto. L'accelerazione in caduta libera risulta quindi negativa e nelle equazioni si può sostituire **a** con –**g**.

Esempio 1



Un sasso viene lasciato cadere da una finestra posta a 40m dal suolo.

(a) Quando toccherà terra?

y	**a**	**v**	**v_0**	**t**
-40m	$-9.81ms^{-2}$		$0ms^{-1}$	?

Usare l'equazione (3),

$y(t) = v_0(t-t_0) + 1/2\, a\, (t-t_0)^2 = 1/2\, \mathbf{a}t^2$, $\quad t_f^2 = 2\mathbf{y}/\mathbf{a} = 2(-40m)/(-9.81ms^{-2})$ $= 8.15s^2$

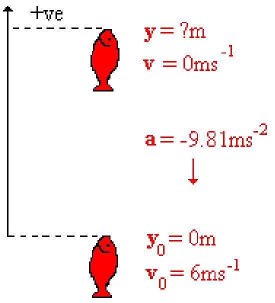
$$t_f = 2.86s = 2.9s$$

(b) Qual'è la velocità del sasso quando tocca terra?

Usare l' equazione (1),

$v = v_0 + a(t-t_0) = 0ms^{-1} + (-9.81ms^{-2})(2.86s-0s) = -28.1ms^{-1} = -28\ m/s$

Esempio Salto verticale.



Un salmone salta verticalmente fuori dall'acqua con velocità iniziale di $6ms^{-1}$. Sarà in grado di superare una cascata alta 1.5m ?

Sol.

N.B.: Punto di massima altezza quando la velocita' e' nulla !!!

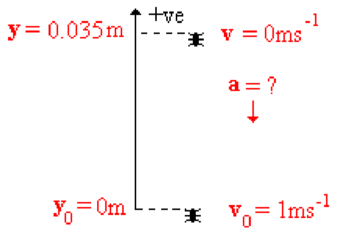
$$v(t)=v(t_0)+a(t-t_0) \Rightarrow 0=v(t_0)+a(\bar{t}-t_0) \Rightarrow \bar{t}=-\frac{v(t_0)}{a}$$

$$y(t)=y(t_0)+v(t_0)(t-t_0)-\frac{a}{2}(t-t_0)^2 \Rightarrow y(\bar{t})=v(t_0)\bar{t}+\frac{a}{2}(\bar{t})^2$$

$$y(\bar{t})=-\frac{v(t_0)^2}{a}+\frac{a}{2}\left(\frac{v(t_0)}{a}\right)^2=-\frac{v(t_0)^2}{2a}=\frac{v(t_0)^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \quad y(\bar{t})=\frac{(6\,m/s)^2}{2(9.81\,m/s^2)}=1.83\,m=1.8\,m$$

Esempio: Salto verticale



La pulce salta con velocità iniziale di 1ms^{-1} e raggiunge un'altezza di 0.035m. Qual'è l'accelerazione (costante) della pulce ?

Sol.

$$v(t)=v(t_0)+a(t-t_0) \Rightarrow 0=v(t_0)+a(\bar{t}-t_0) \Rightarrow \bar{t}=-\frac{v(t_0)}{a}$$

$$y(t)=y(t_0)+v(t_0)(t-t_0)-\frac{a}{2}(t-t_0)^2 \Rightarrow y(\bar{t})=v(t_0)\bar{t}+\frac{a}{2}(\bar{t})^2$$

$$y(\bar{t})=-\frac{v(t_0)^2}{a}+\frac{a}{2}\left(\frac{v(t_0)}{a}\right)^2=-\frac{v(t_0)^2}{2a} \Rightarrow a=-\frac{v(t_0)^2}{2\mathrm{y}(\bar{t})}=-\frac{(1\mathrm{m}/s)^2}{2(0.035\,m)}=-14.3\,ms^{-2}=-14\mathrm{ms}^{-2}$$

Notare che l'accelerazione e la velocità hanno verso opposto e quindi la pulce sta "rallentando" cioè sta decelerando.

Moto in due e tre dimensioni

Posizione e spostamento

Un modo per localizzare un oggetto puntiforme è per mezzo del **vettore posizione** $\vec{r}$**,** un vettore che si estende da un punto di riferimento al punto in cui si trova un oggetto. Secondo la notazione che utilizza i versori degli assi:

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

dove $x\hat{\mathbf{i}}, y\hat{\mathbf{j}}, z\hat{\mathbf{k}}$ sono i *vettori componenti* di $\vec{r}$
e i coefficienti x,y,z sono le sue *componenti scalari*; essi forniscono la posizione dell'oggetto rispetto all'origine lungo gli assi.

Modulo di un vettore

Dato un vettore, come per esempio il vettore posizione:

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

Il modulo di tale vettore sarà dato da:

$$|\vec{r}| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Nelle note del corso il modulo di un vettore sarà indicato dalla lettera del vettore stesso (senza la freccia).

Quando un corpo si muove il suo vettore posizione cambia in modo da puntare sempre dall'origine verso le nuove diverse posizioni del corpo. Se al tempo t_1 il corpo ha vettore posizione $\mathbf{r}_1$ e al tempo t_2 ha vettore posizione $\mathbf{r}_{2,}$ il vettore spostamento nell'intervallo t_2-t_1 vale:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

che usando la notazione con i versori diventa:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \left(x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}\right) - \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}\right)\\ &= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}\\ &= \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}\,i\end{aligned}$$

Velocità vettoriale media e istantanea

In analogia con il caso unidimensionale la **velocità vettoriale media**:

$$\bar{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}$$

mentre la **velocità vettoriale istantanea**:

$$\vec{v}(t)=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\hat{i}+\frac{dy}{dt}\hat{j}+\frac{dz}{dt}\hat{k}$$

che si può anche scrivere:

$$\vec{v}(t)=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}\quad\text{dove}\quad v_x=\frac{dx}{dt},v_y=\frac{dy}{dt},v_z=\frac{dz}{dt}$$

Accelerazione vettoriale media e istantanea

Nello stesso modo l'**accelerazione vettoriale media**:

$$\bar{\vec{a}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i}+\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}+\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\hat{k}$$

mentre l' **accelerazione vettoriale istantanea**:

$$\vec{a}(t)=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\hat{i}+\frac{dv_y}{dt}\hat{j}+\frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

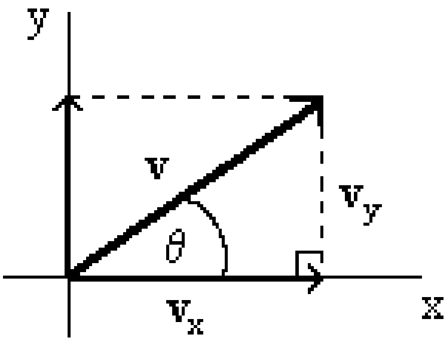
che si può anche scrivere:

$$\vec{a}(t)=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}\quad\text{dove}\quad a_x=\frac{dv_x}{dt},a_y=\frac{dv_y}{dt},a_z=\frac{dv_z}{dt}$$

Velocità in 2-Dimensioni

In 2D la velocità $\vec{v}$ ha componenti v_x e v_y.

Il valore di tali componenti sono dati rispettivamente da:



$v_x = v \cos$ and $v_y = v \sin$

e dal teorema di Pitagora,

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$

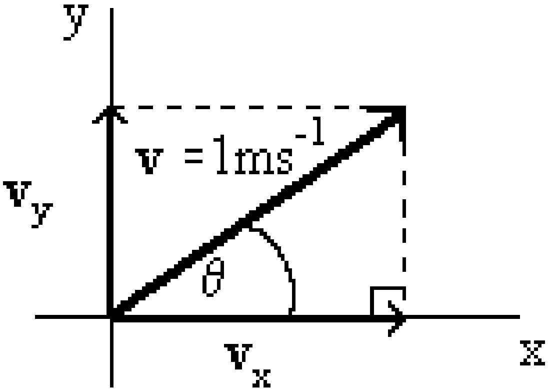
(modulo del vettore v al quadrato)

Esempio - componenti di un vettore bidimensionale

Un uccello vola con una velocità di 1ms^{-1} lungo una direzione di 30° sopra l'orizzonte (asse x).

Quali sono le componenti orizzontale e verticale della velocità?

Sia l'asse x l'asse orizzontale e l'asse y quello verticale.



$\cos = v_x/v$

$v_x = v \cos\theta$ $= (1\text{ms}^{-1}) \cos 30° = 0.866\text{ms}^{-1}$

$\sin = v_y/v$

$v_y = v \sin \theta$ $= (1\text{ms}^{-1}) \sin 30° = 0.5\text{ms}^{-1}$

Equazioni della cinematica per moto uniformemente accelerato in due-dimensioni

Componente x:

$$v_x(t)=v_x(t_0)+a_x(t-t_0)$$

$$x(t)=v_x(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2}a_x(t-t_0)^2$$

Componente y:

$$v_y(t)=v_y(t_0)+a_y(t-t_0)$$

$$y(t)=v_y(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2}a_y(t-t_0)^2$$

N.B. La parte x del moto si svolge esattamente come se la parte y non avvenisse affatto. Analogamente, la parte y del moto si svolge esattamente come se la parte x non avvenisse affatto. Quindi il moto x e il moto y sono indipendenti l'uno dall'altro ---> equivale a studiare due moti unidimensionali.
E' chiaro pero' che il moto in d=2 si ottiene costruendo, alla fine, i vettori

$$\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j} \quad \vec{v}(t)=v_x(t)\hat{i}+v_y(t)\hat{j} \qquad \vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}$$

Moto dei proiettili

Consideriamo un corpo che si muove in due dimensioni, in caduta libera, con velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ e accelerazione di gravità **g** costante e diretta verso il basso. Per questo tipo di corpo si parla di moto di un proiettile.

N.B. Si trascurano gli effetti della resistenza dell'aria

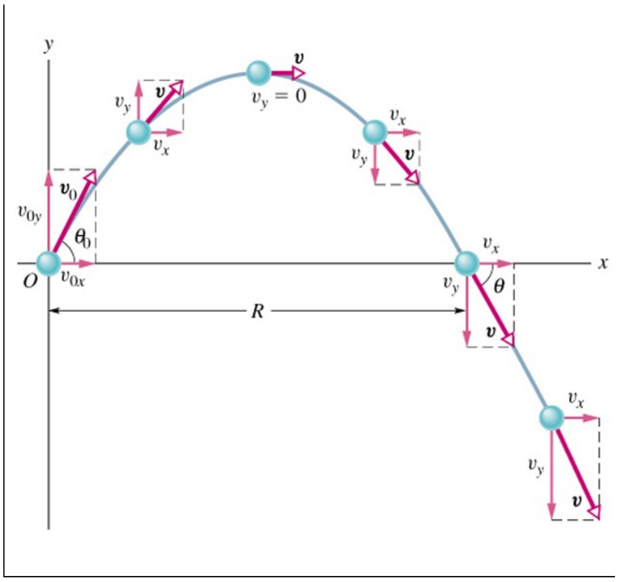
La velocità iniziale si può esprimere in componenti come:

$$\vec{v}(t_0)=v_x(t_0)\hat{i}+v_y(t_0)\hat{j} \quad \text{dove}$$

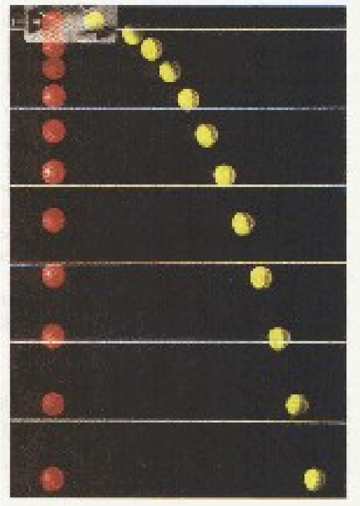
$$v_x(t_0)=v(t_0)\cos\theta_{0,} \quad v_y(t_0)=v(t_0)\sin\theta_0$$

Durante il moto il proiettile non possiede accelerazione orizzontale ma solo accelerazione (costante) verso il basso.

Halliday et al.capitolo 4 →



Traiettoria di un proiettile lanciato dal punto x_0=0 e y_0=0 con velocità iniziale $\mathbf{v}_0$=0. Notare che la componente orizzontale della velocità rimane costante mentre quella verticale varia con continuità.



La traiettoria di due palline da golf mentre cadono (una con velocità orizzontale diversa da zero e l’altra no) chiarisce l’indipendenza dei due moti (quello orizzontale e quello verticale). N.B. Siamo sempre in assenza di effetti di resistenza dell’aria.

Equazioni del moto dei proiettili

Moto orizzontale

Non essendoci accelerazione orizzontale Il moto orizzontale è un moto rettilineo uniforme (v costante = v_0) ⇒

$$\Delta x = v_x \Delta t$$

In questo caso la velocità coincide con quella iniziale e ponendo t_0=0 ⇒

$$x(t) - x(t_0) = v_x(t_0)\,t$$

⇓

Equazione del moto orizzontale

$$x(t) = x(t_0) + \left(v_x(t_0)\cos\theta_0\right)t \quad (4.15)$$

Equazioni del moto dei proiettili

Moto verticale

In questo caso si ha un'accelerazione verticale costante verso il basso. Il moto verticale corrisponde a quello di un corpo in caduta libera: (moto uniformemente accelerato)

$$y(t)-y(t_0)=v_y(t_0)t-\frac{1}{2}gt^2=\left(v(t_0)\sin\theta_0 t\right)-\frac{1}{2}gt^2 \qquad (4.16)$$

L' equazione della velocità si potrà scrivere ricordando le eq. della cinematica in due dimensioni:

Dall eq. (1) $v_y(t)=\left(v(t_0)\sin\theta_0\right)-g\,t$

➡ $v_y^2(t)=\left(v(t_0)\sin\theta_0\right)^2-2g\left(y(t)-y(t_0)\right)$

Equazione della traiettoria: y=f(x)

$$x(t)-x(t_0)=\left(v(t_0)\cos\theta_0\right)t$$
$$y(t)-y(t_0)=\left(v(t_0)\sin\theta_0 t\right)-\frac{1}{2}gt^2$$

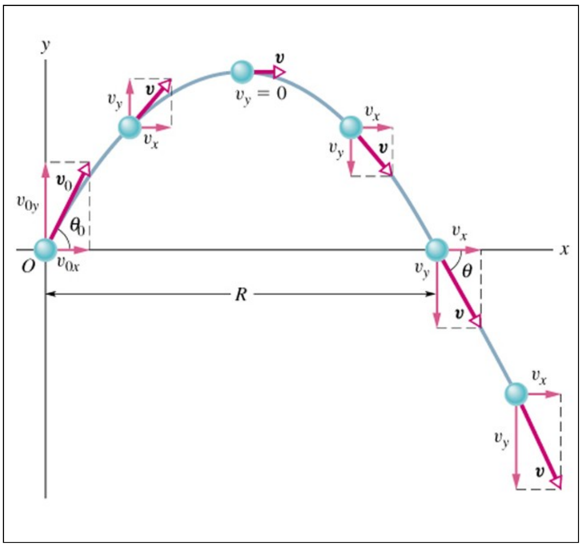
Eliminando t dalle equazioni si ottiene:
(ponendo x(0)=y(0)=0 per semplicità)

$$y(t)=\left(\tan\theta_0\right)x(t)-\frac{gx^2(t)}{2\left(v(t_0)\cos\theta_0\right)^2}$$

Traiettoria parabolica

Gittata orizzontale

La gittata R del proiettile è la distanza orizzontale coperta dal proiettile all'istante in cui ripassa alla quota di partenza y (0).



Ponendo x-x(0)=R nella (4.15) e y-y(0)=0 nella (4.16) ed eliminando t dalle due equazioni si ottiene:

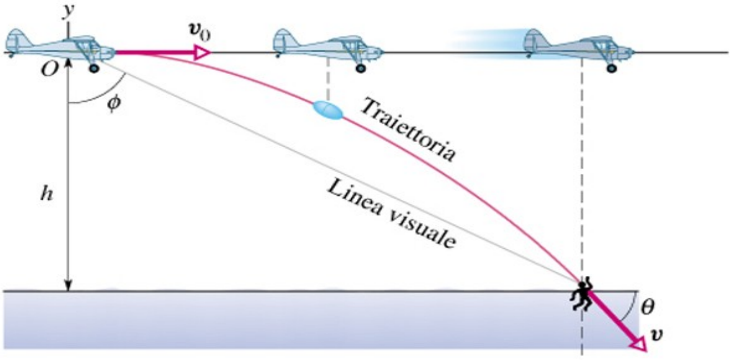
$$R = \frac{2v^2(t_0)}{g} \sin\theta_0 \cos\theta_0 = \frac{v^2(t_0)}{g} \sin(2\theta_0)$$

N.B. R ha valore massimo per =45 gradi

Problema svolto 4.6 : Halliday et al. Pag 56

(a) Calcolare l'angolo ottimale per "centrare" il naufrago.

(b) Velocità della capsula al momento dell'impatto



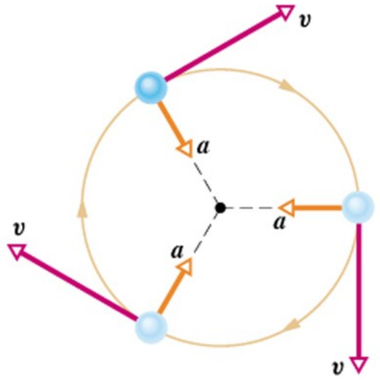
In un moto bidimensionale qualsiasi, il vettore velocita' istantanea al tempo t ha la direzione uguale a quella della tangente alla traiettoria nel punto individuato dal vettore posizione r(t).

Sugg: Vedere come si comporta il vettore distanza Δr nel limite t → 0

Moto circolare uniforme

- Una particella che si muove su una **circonferenza** o su un arco di circonferenza con il **modulo della velocità costante** si dice in **moto circolare uniforme**.
- In realtà la direzione del vettore velocità cambia durante il moto e quindi si ha un'**accelerazione**.

La figura mostra la relazione
tra i vettori velocità e accelerazione
in moto circolare uniforme:



Al procedere del moto entrambi i vettori restano **costanti in modulo**
ma **variano le direzioni in modo continuo.**

Halliday et al. Cap.4

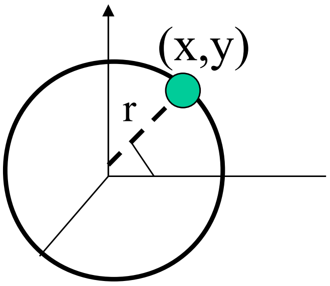
La **velocità è sempre diretta lungo la tangente al cerchio** nel verso del moto mentre **l'accelerazione è sempre diretta radialmente verso il centro**. Si parla di accelerazione centripeta.

Durante il moto la particella percorre la circonferenza nel tempo T dato da:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Descrizione in termini di variabili angolari….

Velocità angolare media e instantanea



$$\Delta\theta = \theta(t_2) - \theta(t_1)$$

Angolo sotteso dalla particella nell'intervallo di tempo   t = $t_2 - t_1$

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

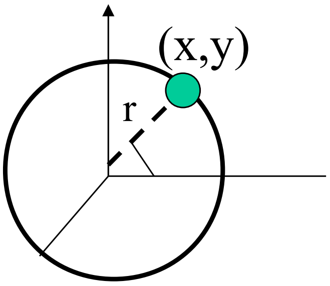
Velocità angolare media nell'intervallo di tempo   t

In generale la velocita' angolare media dipende dall'intervallo   t scelto (vero per tutte le velocita' medie di un moto generico).

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Velocità angolare istantanea

In un moto circolare uniforme, la velocità angolare istantanea è costante



$$\omega = \bar{\omega} \equiv \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

Velocità angolare

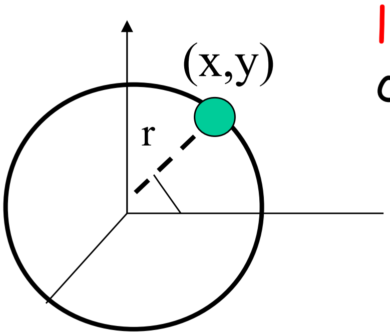
Moto uniforme negli angoli

Legge oraria per gli angoli del moto circolare uniforme:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{2\pi}{T}(t - t_0) = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

Moto lungo una circonferenza come moto bidimensionale

Moto bidimensionale $\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}$



Poiché il moto è uniforme negli angoli, le coordinate polari sono le coordinate naturali del moto

$$x(t)=r\cos\theta(t)$$
$$y(t)=r\sin\theta(t)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t)=r\left(\cos\theta(t)\hat{i}+\sin\theta(t)\hat{j}\right)$$

Poiché $\theta(t)=\theta_0+\frac{2\pi}{T}(t-t_0)=\theta_0+\omega(t-t_0)$

Se per semplicita' poniamo $t_0=0,$ $\theta_0=0$ $\Rightarrow$ $\theta(t)=\frac{2\pi}{T}t=\omega t$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned}\vec{r}(t)&=r\left(\cos\theta(t)\hat{i}+\sin\theta(t)\hat{j}\right)\\&=r\left(\cos(\omega t)\hat{i}+\sin(\omega t)\hat{j}\right)\end{aligned}$$

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=r\omega\left(-\sin(\omega t)\hat{i}+\cos(\omega t)\hat{j}\right)$$

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=r\omega^2\left(-\cos(\omega t)\hat{i}-\sin(\omega t)\hat{j}\right)$$

$$|\vec{v}(t)|^2 = r^2\omega^2\left(\sin^2(\omega t)+\cos^2(\omega t)\right) = r^2\omega^2$$

$$|\vec{v}(t)| = v = r\omega$$

Relazione tra modulo della velocità tangenziale e velocità angolare

$$|\vec{a}(t)|^2 = r^2\omega^4\left(\sin^2(\omega t)+\cos^2(\omega t)\right) = r^2\omega^4$$

$$|\vec{a}(t)| \equiv a = r\omega^2 = |\vec{v}(t)|^2 / r$$

Esercizio:

Scrivere le relazioni precedenti nel caso in cui

$$t_0 \neq 0, \quad \theta_0 \neq 0$$

Ripassare l'analisi vettoriale sul capitolo 3 dell'Halliday

Esercizi consigliati (Halliday Capitolo 4)

5E , 6E, 9E, 11P, 12P , 16E, 18E, 20E, 27P, 41P, 43P (quinta edizione)

4 , 5, 8, 10, 11 , 14, 15,16, 17, 33, 37. (sesta edizione)

Guardare inoltre i quesiti a pag. 64
e tutti i problemi svolti !!!