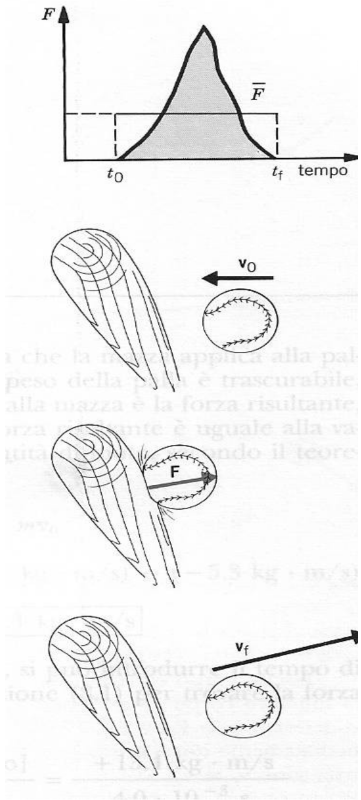
Impulso e quantità di moto

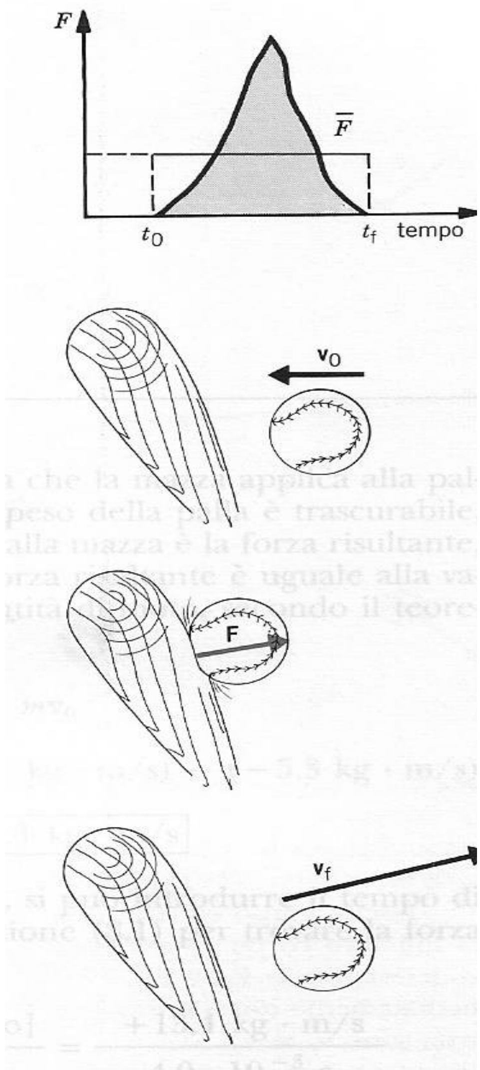
N.B. *In molte situazioni la forza risultante presente nella seconda legge di Newton non è facilmente descrivibile.*



Esempio: quando un palla da baseball viene colpita, la forza che la mazza applica alla palla cresce partendo dal valore nullo all'istante in cui la mazza tocca la palla,raggiunge un valore massimo quando si ha pieno contatto tra i due corpi e poi decresce sino a zero quando la palla abbandona la mazza.

In questo caso non è comodo utilizzare la seconda legge di Newton per determinare l'accelerazione ma occorre introdurre nuovi concetti quali quelli di urto e di impulso di una forza.

Impulso di una forza



L'impulso di una forza è il prodotto della forza media $\overline{\mathbf{F}}$ e dell'intervallo di tempo t durante il quale agisce la forza :

$$\vec{J} = \vec{\overline{F}}\,\Delta t$$

L'impulso è un vettore

(stessa direzione di $\overline{\mathbf{F}}$)

Unità di misura nel SI :

Newton secondo (Ns).

Quantità di moto

Sia la massa che la velocità intervengono nel modo in cui un corpo risponde ad un dato impulso. E' quindi utile introdurre il concetto di quantità di moto:

$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

La quantità di moto **p** di un corpo è il prodotto della massa m per il vettore velocità **v**.

La quantità di moto è un **vettore** che ha la stessa direzione e verso della velocità.

Unità di misura della quantità di moto nel SI: $kg\ ms^{-1}$

Teorema dell'impulso (teorema della quantità di moto)

Per stabilire la **relazione tra impulso e quantità di moto** si usa la seconda legge di Newton. Se un corpo varia la propria velocità da $\mathbf{v}_i$ a $\mathbf{v}_f$ durante un intervallo di tempo t, l'accelerazione media vale:

$$m\vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t}$$

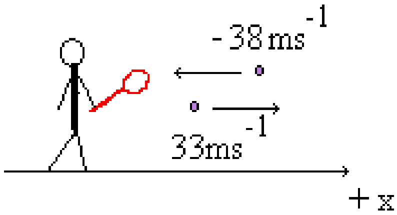
Dalla seconda legge di Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \frac{m\vec{v}_f - m\vec{v}_i}{\Delta t}$$

$$\vec{J} = \vec{F}\,\Delta t = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = \Delta\vec{p}$$

Impulso = variazione della quantità di moto

Esempio



Una palla da tennis (m = 0.06kg) arriva con velocità ($\mathbf{v}_i$ = -38ms^{-1}). Se viene mandata indietro alla velocità $\mathbf{v}_f$ =33ms^{-1}) :

(a) determinare l'impulso applicato sulla palla dalla racchetta.

m $|\mathbf{v}_i|$ = (0.06kg)(-38ms^{-1}) = -2.28kgms^{-1}

m $|\mathbf{v}_f|$= (0.06kg)(+33ms^{-1}) = +1.98kgms^{-1}

|J| = m $|\mathbf{v}_f|$- m$|\mathbf{v}_i|$= (+1.98kgms^{-1}) – (-2.28kgms^{-1}) = +4.3kgms^{-1}

(b) Se il tempo di contatto vale 4x10^{-3}s trovare la forza media:

$$\vec{J} = \vec{F}\,\Delta t$$

$$|\vec{F}| = \frac{|\vec{J}|}{\Delta t} = (4.26\,Kg\,m/s)/(4\times 10^{-3}\,s) = 1065\,N = 1.1\times 10^{3}\,N$$

Dinamica di un sistema di n punti materiali

Centro di massa di un sistema di n punti

Conservazione della quantità di moto di un sistema di n punti isolato

Moto del centro di massa.

Centro di massa di un sistema di n punti materiali.

Consideriamo n punti materiali ciascuno con una propria massa m_i e vettore posizione $\mathbf{r}_i$

Il centro di massa del sistema è definito come il punto dello spazio identificato dal vettore posizione:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

Centro di massa di un sistema di n punti materiali.

Per componenti si avrà: $\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}$

dove:

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

Quantità di moto di un sistema di n punti materiali

- Consideriamo n punti materiali ciascuno con una propria massa , velocità e, quindi, quantità di moto.
- I punti possono interagire tra loro e possono essere soggetti anche a forze esterne al sistema.
- Il sistema possiede una quantità di moto complessiva $\mathbf{p}^{tot}$ definita come:

$$\vec{p}^{\,tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots \vec{p}_n$$
$$= m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 \ldots + m_n \vec{v}_n$$

Conservazione della quantità di moto

Supponiamo che la risultante delle forze esterne agenti sul sistema sia nullo (sistema isolato) e che nessuna particella entri nel sistema o ne esca (sistema chiuso)

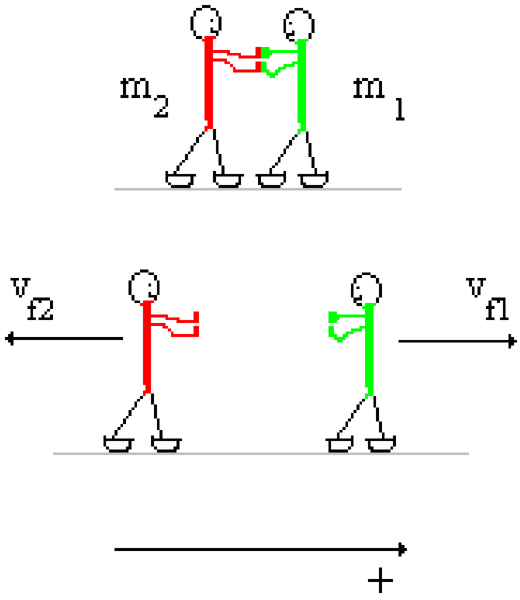
$$\boxed{\mathbf{p}^{tot} = \textbf{costante} \quad \textbf{(sistema chiuso e isolato)}}$$

Quando su un sistema isolato di punti materiali agisce una forza esterna netta nulla (sistema isolato), la ***quantità di moto totale p^{tot}*** *del sistema si conserva.*

Se una componente di una forza esterna netta agente su un sistema chiuso è zero, la componente della quantità di moto del sistema lungo quell'asse non cambia..

Esempio

Due pattinatori inizialmente in quiete si spingono l'un l'altro con forze uguali in modulo ma opposte. Il pattinatore verde ha massa (m_1 = 80kg) e velocità finale (v_{f1} = 2.0ms^{-1}), mentre quello rosso ha massa (m_2 = 70kg).



Quant'è la velocità finale v_{f2} del pattinatore rosso ?

Soluzione:

Dalla conservazione della quantità di moto si ha:

$m_1v_{f1} + m_2v_{f2} = m_1v_{01} + m_2v_{02} = 0$ (in quanto inizialmente in quiete)

$m_1v_{f1} + m_2v_{f2} = 0$

$v_{f2} = -(m_1v_{f1})/m_2 = -(80kg)(2.0ms^{-1})/(70kg) = -2.3ms^{-1}$

Problema svolto 9.5 Halliday et al.

Una scatola di massa m=6.0 Kg scivola su un pavimento privo di attrito alla velocità di 4.0m/s nel verso positivo delle x. Ad un certo punto si rompe in due pezzi. Un pezzo di massa m_1 =2.0Kg si muove nel verso positivo delle x con velocità v_1=8.0 m/s. Qual è la velocità del secondo pezzo di massa m_2 ?

Idea: poiché conosciamo la massa del secondo pezzo, per ottenere la sua velocità è sufficiente calcolare la sua quantità di moto.

Osservazione:

La forza di gravità e quella normale non influiscono sul moto lungo x e quindi lungo questa direzione sul sistema scatola (che poi si scinde in due pezzi) non agiscono forze esterne

➔ la quantità di moto si conserva.

$\vec{p}_i = m\vec{v}$ quantita' di moto della scatola intera

Quantità di moto finali dei due pezzi: $\vec{p}_{f1} = m_1 \vec{v}_1$ e $\vec{p}_{f2} = m_2 \vec{v}_2$

Quantità di moto totale alla fine: $\vec{p}_f = \vec{p}_{f1} + \vec{p}_{f2} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$

Forza esterna netta nulla ➔ $\vec{p}_i = \vec{p}_f$

$$\Rightarrow \quad mv = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$(6.0\,Kg)(4.0\,m/s) = (2.0\,Kg)(8.0\,m/s) + (4.0\,Kg)\,v_2$$

$$v_2 = 2.0\,m/s$$

Esempio

Due carri merci, inizialmente separati, vengono agganciati. Il carro 1 ha m_1=65000 Kg e si muove con velocità v_{i1}=0.80 m/s. Il carro 2, che ha m_2=92000 Kg e velocità v_{i2}=1.2 m/s, raggiunge il primo carro e si aggancia ad esso. Trascurando l'attrito trovare la velocità comune v_f dopo l'aggancio.

Soluzione:

Il sistema da considerare è quello formato dai due carri merci. Poiché il peso dei carri è equilibrato dalla forza normale non vi sono forze esterne nette diverse da zero ➔ vale la **conservazione della quantità di moto**. (Le forze di aggancio sono forze interne).

Conservazione quantità di moto

$$\underbrace{m_1 v_{i1} + m_2 v_{i2}}_{\text{Prima dell'urto}} = \underbrace{(m_1 + m_2) v_f}_{\text{dopo urto}}$$

E quindi :

$$\begin{aligned} v_f &= \frac{m_1 v_{i1} + m_2 v_{i2}}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{(65 \times 10^3\, Kg)(0.80\, m/s) + (92 \times 10^3\, Kg)(1.2\, m/s)}{(65 \times 10^3\, Kg + 92 \times 10^3\, Kg)} \\ &= 1.0\, m/s \end{aligned}$$

Moto del centro di massa

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

Derivando rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

Moto del centro di massa

In termini di quantità di moto si ha:

$$M\,\vec{v}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \equiv \vec{p}^{\,tot}$$

Dal teorema sulla conservazione della quantità di moto che dice:

Quando su un sistema isolato di punti materiali agisce una forza esterna netta nulla (sistema isolato), la **quantità di moto totale $\mathbf{p}^{tot}$** del sistema si conserva,

Si ottiene che:

Il centro di massa di un sistema isolato di punti materiali in cui la forza risultante esterna è nulla si muove di moto rettilineo uniforme.

Moto del centro di massa

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

Deriviamo due volte rispetto al tempo:

$$\frac{d^2\vec{r}_{cm}}{dt^2} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i$$

Moto del centro di massa

$$M\,\vec{a}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i$$

Del resto su ogni particella i-esima varrà la legge di Newton:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{\text{tot,int}} + \vec{F}_i^{\text{tot,ext}}$$

$\vec{F}_i^{tot,\text{int}}$ Risultante delle forze agenti su i dovute alle altre n-1particelle (forze interne)

$F_i^{tot,ext}$ Risultante delle forze esterne agenti su i.

Moto del centro di massa

$$M\,\vec{a}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{tot,ext}} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{tot,int}}$$

Dalla terza legge di Newton, ad ogni forza
F $_{i\rightarrow j}$ ne corrisponde una uguale e contraria F $_{j\rightarrow i}$. Quindi
La seconda somma è nulla in quanto le forze interne si elidono a coppie.

$$\Longrightarrow \quad M\,\vec{a}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{tot,ext}} \equiv \vec{F}^{\text{tot,ext}}$$

L'equazione sopra esprime la seconda legge di Newton per il centro di massa di un insieme di punti materiali. $F^{\text{tot,ext}}$ è la forza vettoriale di tutte le forze esterne che agiscono sul sistema.

Esercizi consigliati (Halliday capitolo 9)

3E, 7P, 22E, 27E, 33P (quinta edizione)

1,3, 14 , 27, 29 (sesta edizione)

Guardare attentamente i problemi svolti

9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 9.5, 9.6, 9.7