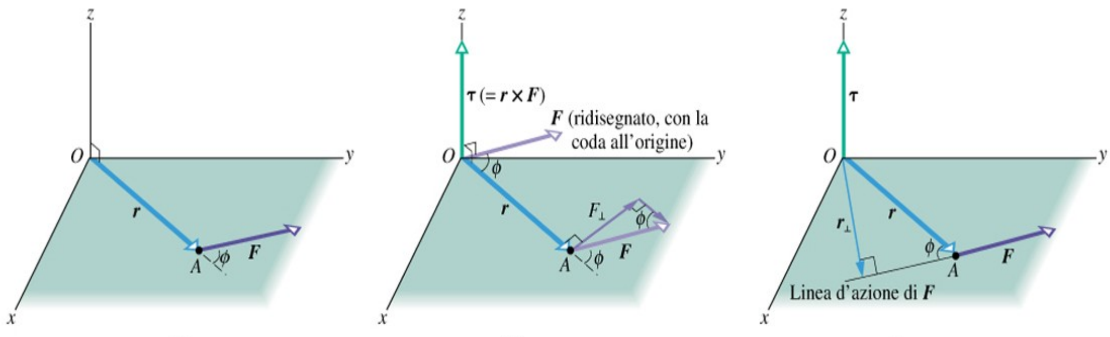
Momento di una forza: particella in moto

Consideriamo un corpo puntiforme (particella) in moto. Ad un istante t la particella si trova nel piano xy, in A, di posizione **r.** La forza ***F*,** che giace nel piano xy, agisce sulla particella in A.



Si definisce momento esercitato sulla particella dalla forza ***F*** rispetto all'origine O il vettore

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Modulo di :

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin \phi \quad (\ \phi \ \text{angolo tra} \ \vec{r} \ \text{e} \ \vec{F}\ )$$

Direzione di :

Perpendicolare al piano individuato dalle direzioni di **F** e **r**.

Verso di :

Una volta portata a coincidere (traslazione rigida) la “coda” di **F** con la “coda” di **r**, il verso è determinabile dalla regola della mano destra o dalla regola della vite.

in componenti :

Le componenti di sono quelle tipiche di un prodotto vettoriale .
(regola dei determinanti)

$$\tau_x = yF_z - zF_y, \quad \tau_y = zF_x - xF_z, \quad \tau_z = xF_y - yF_x$$

Momento angolare (momento della quantità di moto)

Particella di massa m con quantità di moto **p**=m**v** che transita dal punto A del piano xy. Il momento angolare **L** (o momento della quantità di moto) della particella rispetto all'origine O è dato da:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\left(\vec{r} \times \vec{v}\right)$$

Unità di misura (SI): Kg m²/s

Per modulo, direzione, verso e componenti di **L**

Vedi discorso fatto per il momento

Seconda legge di Newton in forma angolare

La seconda legge di Newton espressa nella forma

$$\vec{F}^{tot} = m\,\vec{a} = m\frac{d\,\vec{v}}{dt} = \frac{d\,(m\,\vec{v})}{dt} = \frac{d\,\vec{p}}{dt} \quad \text{(corpo puntiforme)}$$

mette in relazione la forza e la quantità di moto di un oggetto puntiforme.

Moltiplicando vettorialmente i due membri dell'equazione per il vettore posizione si ottiene (essendo dr/dt x p = 0)

$$\vec{\tau}^{\,tot} = \frac{d\,\vec{L}}{dt} \quad \text{(corpo puntiforme)}$$

che è appunto la forma angolare della seconda legge di Newton per un oggetto puntiforme.

Momento angolare di un sistema di N particelle

Date N particelle, il momento angolare totale è dato dalla somma dei momenti angolari delle singole particelle:

$$\vec{L}^{\,\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$$

Derivando rispetto al tempo :

$$\frac{d\vec{L}^{\,\mathrm{tot}}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

Del resto, dalla forma angolare della legge di Newton:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{\tau}_i^{\,\mathrm{tot}}$$

(somma dei momenti delle forze che agiscono sull'i-esima particella)

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}^{\,\mathrm{tot}}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{\,\mathrm{tot}} \equiv \vec{\tau}^{\,\mathrm{tot}}$$

Versione angolare della seconda legge di Newton per un sistema di N particelle.

Altre corrispondenze fra espressioni relative a moti di traslazione e di rotazione[a]

Traslazione		Rotazione	
Forza	$\boldsymbol{F}$	Momento della forza	$\boldsymbol{\tau}\ (= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})$
Quantità di moto	$\boldsymbol{p}$	Momento angolare	$\boldsymbol{\ell}\ (= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$
Quantità di moto[b]	$\boldsymbol{P}\ (= \sum \boldsymbol{p}_i)$	Momento angolare[b]	$\boldsymbol{L}\ (= \sum \boldsymbol{\ell}_i)$
Quantità di moto[b]	$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_{\mathrm{cdm}}$	Momento angolare[c]	$L = I\omega$
Seconda legge di Newton[b]	$\boldsymbol{F}_{\mathrm{net}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}$	Seconda legge di Newton[b]	$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{net}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$
Legge di conservazione[d]	$\boldsymbol{P} = \text{constante}$	Legge di conservazione[d]	$\boldsymbol{L} = \text{constante}$

Per sistemi di particelle, corpi rigidi compresi.
Per un corpo rigido rotante intorno a un asse fisso, essendo L la componente lungo quest'asse.
Per un sistema chiuso e isolato.

Conservazione del momento angolare

Dall'equazione: $\vec{\tau}^{\,tot} = \dfrac{d\vec{L}^{\,tot}}{dt}$, se il momento risultante delle forze esterne agenti sul sistema è nullo

$$\Rightarrow \quad \vec{L}^{\,tot} = \text{cost} \quad \text{(sistema isolato)}$$

Principio di conservazione del momento angolare

altrimenti scritto come:

$$\vec{L}^{\,tot}(t_i) = \vec{L}^{\,tot}(t_f)$$

Se il momento delle forze esterne è nullo, il vettore momento angolare *L* del sistema rimane costante, *indipendentemente dai cambiamenti che avvengono all'interno del sistema.*

Conservazione del momento angolare lungo una componente

Se una componente del momento delle forze esterne che agiscono su un sistema è nullo, la componente del il vettore momento angolare *L* del sistema *lungo la stessa direzione* rimane costante, *indipendentemente dai cambiamenti che avvengono all'interno del sistema*.

Esempio: **Se** $\tau_y^{tot} = 0$

$$L_y^{tot}(t_i) = L_y^{tot}(t_f)$$

Esercizi Halliday

19E, 20P,21P, 22P,23E ,24E, 25E, 29E, 30°
(Capitolo 12 quinta edizione)

12, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23 (Capitolo 11 sesta edizione)

Problemi svolti

(12.3, 12.4,12.5, quinta edizione)

(11.3, 11.4,11.5, sesta edizione)