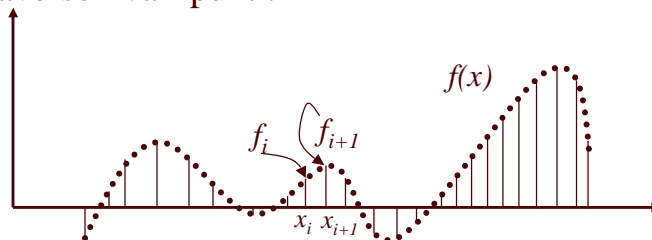


Metodi Computazionali della Fisica

Interpolazione

Problema da risolvere

- Data una lista di punti $[x_i, f_i]$, $i=1, \dots, n$, stimare $f(x)$ per valori arbitrari di x
- Graficamente: disegnare una curva regolare attraverso i vari punti.



Interpolazione & Curve-fitting

- Spesso si hanno a disposizione insiemi di dati provenienti da misure sperimentali.
 - Tipicamente, si vede che i dati di (output) **variano ..**
 - Al variare di **parameter di controllo (input)**.
 - Esempi:
 - Variazione della pressione con la profondita'
 - Variazione temporale della velocita' del vento
 - Variazione spaziale della temperatura
- Metodo scientifico: I dati identificano una relazione da trovare.
- Processo noto come **curve fitting**.

21/10/2004

3

Interpolazione & Curve-fitting

- Dato un'insieme di dati di $n+1$ punti (x_i, y_i) identificare una funzione $f(x)$ (la **curva**), che sia in qualche (ben-definito) modo il **best fit** dei dati
- Utilizzato per:
 - Identificare una relazione sottesa (modello/predizione)
 - Interpolazione (riempimento dei vuoti)
 - Estrapolazione (predizione al di fuori del range dei dati)

21/10/2004

4

Interpolazione Vs Regressione

- A seconda della qualità dei dati si possono usare diversi approcci.
- Consideriamo le figure qui sotto: :



Buona confidenza nei dati:
c'è una relazione polinomiale
Poca dispersione dei dati
Si vuole trovare un'espressione
che passi **esattamente** attraverso tutti i punti

21/10/2004

Non si sa quale sia la relazione giusta
Chiara dispersione dei dati
Si vuole trovare un'espressione
che descriva l'andamento:
minimizzando l'errore

5

Interpolazione

- Consideriamo prima il caso in cui non vi sono errori nei dati.
- Si ha quindi $y_i = f(x_i)$ negli $n+1$ punti $x_0, x_1, \dots, x_p, \dots, x_n$; $x_j > x_{j-1}$
- (Spesso ma non sempre equispaziati)
- In generale, non si conosce la funzione $f(x)$
- Concettualmente, l'interpolazione consiste di due parti:
 - Sviluppare una semplice funzione $g(x)$ che
 - Approssimi $f(x)$
 - Passi attraverso tutti i punti x_i
 - Valutare $f(x_i)$ dove $x_0 < x_i < x_n$

21/10/2004

6

Interpolazione

- E' chiaro quanto sia cruciale la selezione della funzione semplice $g(x)$.
- I tipi di funzione che in genere si considerano:
 - Polinomi
 - Splines
 - Funzioni trigonometriche (per f periodiche)
 - Funzioni spettrali (Fourier)
 - Funzioni razionali

21/10/2004

7

Interpolazione polinomiale

- Si consideri un insieme di $n+1$ valori $y_i=f(x_i)$ negli $n+1$ punti $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$: $x_j > x_{j-1}$
- In generale, dati **$n+1$** punti, esiste un unico polinomio $g_n(x)$ di ordine n :

$$g_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

che passa attraverso tutti gli $n+1$ punti.

21/10/2004

8

Interpolazione polinomiale

Vi e' una varieta' di modi per esprimere lo stesso polinomio: qui consideriamo due casi:

- Polinomi interpolanti di Lagrange
- Polinomi interpolanti alle differenze divise di Newton.

21/10/2004

9

Interpolazione polinomiale

- **Esistenza** – esiste un polinomio che passa **esattamente** attraverso gli n punti?
SI. Lo si dimostra costruendolo.
- **Unicita'** – Vi e' piu' di un tale polinomio?
NO. Lo dimostriamo piu' avanti.

21/10/2004

10

Polinomi di Lagrange

- Somma di termini, tale che:

- Sia uguale a $f()$ in uno dei punti assegnati.
- Sia uguale a zero in tutti gli altri punti assegnati.
- Ogni termine e' un polinomio di grado n

Esistenza!!!

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

$$L_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

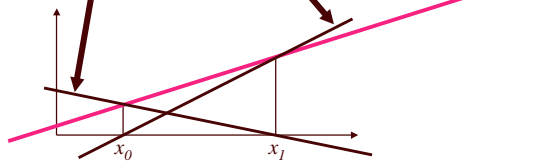
21/10/2004

11

Interpolazione lineare

- Combinazione di due rette:

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^1 L_i(x) f(x_i) \\ = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$



21/10/2004

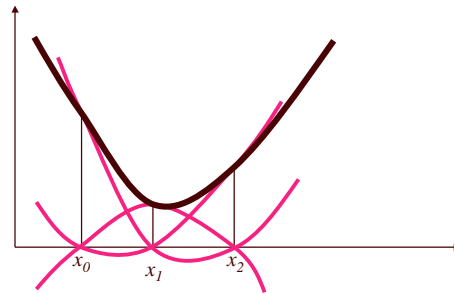
12

Polinomi di Lagrange

- Approssimazione del secondo ordine => polinomi quadratici

Sommandole si ottiene un polinomio interpolante quadratico tale che

- $P(x_0) = f_0$
- $P(x_1) = f_1$
- $P(x_2) = f_2$

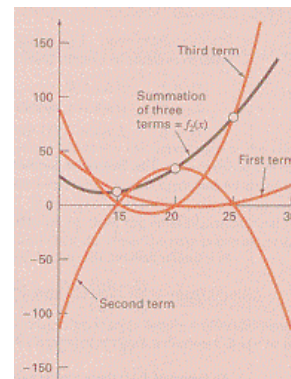


21/10/2004

13

Polinomi di Lagrange

- La somma deve essere un unico polinomio del secondo ordine che passa attraverso tutti i punti assegnati.
- Quale puo' essere un'implementazione efficiente di questo metodo?



21/10/2004

14

Polinomi di Lagrange

Si e' visto che per ogni insieme di **n+1 punti** esiste un unico **polinomio interpolante di ordine n** definito dalla formula di Lagrange:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \left(\prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) f(x_i)$$

Esempio:

$$n = 0 \Rightarrow p_0(x) = f(x_0),$$

$$n = 1 \Rightarrow p_1(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Usare un algoritmo che esprima direttamente tale formula non e' efficiente ed inoltre non fornisce alcuna stima di errore.

21/10/2004

15

Algoritmo di Neville (metodo recursivo)

Si parte dai polinomi di ordine zero :

Dati S_{00}, S_{10} si costruisce il polinomio che passa da x_0 e x_1 con la formula:

$$S_{11} = \frac{(x - x_0)S_{10} + (x_1 - x)S_{00}}{x_1 - x_0}$$

$$S_{00} = f(x_0)$$

$$S_{10} = f(x_1)$$

.....

$$S_{i0} = f(x_i)$$

.....

$$S_{n0} = f(x_n)$$

21/10/2004

16

Algoritmo di Neville

Tabella
recursiva
(n=3):

$x_0 \rightarrow f(x_0) = S_{00}$			
	S_{11}		
$x_1 \rightarrow f(x_1) = S_{10}$		S_{22}	
	S_{21}		S_{33}
$x_2 \rightarrow f(x_2) = S_{20}$		S_{32}	
	S_{31}		
$x_3 \rightarrow f(x_3) = S_{30}$			

Dove, per esempio;

$$S_{22} = \frac{(x-x_0)S_{21} + (x_2-x)S_{11}}{(x_2-x_0)}$$

$$= \frac{1}{(x_2-x_0)} \left\{ (x-x_0) \left[\frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) + \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) \right] + (x_2-x) \left[\frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) + \frac{x_1-x}{x_1-x_0} f(x_0) \right] \right\}$$

21/10/2004

17

Algoritmo di Neville (pseudocodice)

real array $(x_i)_{0:n}, (y_i)_{0:n}$ \longrightarrow Valori assegnati (input)
Arrays unidimensionali

real array $(S_{ij})_{0:n \times 0:n}$ \longrightarrow Valori uscenti (output)
Array bidimensionale

integer i, j, n

for $i=0$ to n do

$$S_{i0} \leftarrow y_i$$

end for

n.b. La routine va chiamata per ogni x di cui si vuole calcolare la $f(x)$

for $j=1$ to n do

for $i=j$ to n do

$$S_{ij} \leftarrow \frac{x-x_{i-j}}{x_i-x_{i-j}} S_{i,j-1} + \frac{x_i-x}{x_i-x_{i-j}} S_{i-1,j-1}$$

end for

end for

21/10/2004

18

Algoritmo di Neville (pseudocodice)

```

real array  $(x_i)_{0:n}, (y_i)_{0:n}$   $\longrightarrow$  Valori assegnati (input)
                                         Arrays unidimensionali
real array  $(S_i)_{0:n}$   $\longrightarrow$  Valori uscenti (output)
                                         Array unidimensionale !!!!!
integer  $i, j, n$ 
for i=0 to n do
     $S_i \leftarrow y_i$ 
end for
                                         n.b. La routine va chiamata per ogni
                                         x di cui si vuole calcolare la f(x)

for j=1 to n do
    for i=n to j step -1 do  $\longrightarrow$  Il loop inverso permette di usare
                                         un array unidimensionale per
                                         i coefficienti S (risparmio memoria)
        
$$S_i \leftarrow \frac{x - x_{i-j}}{x_i - x_{i-j}} S_i + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-j}} S_{i-1}$$

    end for
end for

```

21/10/2004 19

Interpolazione di Newton

- Sia l'insieme degli $n+1$ punti dato da $y_i = f(x_i)$ in x_0, x_1, \dots, x_n : $x_n > x_0$
- Poiché $p_n(x)$ è l'unico polinomio $p_n(x)$ di ordine n , lo scriviamo come:

$$\begin{aligned}
 p_n(x) &= b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \\
 b_0 &= f(x_0) \\
 b_1 &= f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\
 b_2 &= f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} \\
 &\vdots \\
 b_n &= f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0] = \frac{f[x_n, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, \dots, x_0]}{x_n - x_0}
 \end{aligned}$$

- $f[x_i, x_j]$ è una **first divided difference**
- $f[x_2, x_1, x_0]$ è una **second divided difference**, ecc.

21/10/2004

20

Teorema di invarianza

- L'ordine dei punti non è rilevante.
- Si richiede solo che i punti assegnati siano distinti.
- Quindi, la differenza divisa $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ è invariante per permutazioni delle x_i .

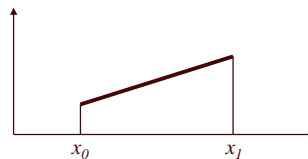
21/10/2004

21

Interpolazione lineare

La semplice interpolazione lineare risulta dall'aver solo due punti assegnati, x_0 e x_1

$$p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$



21/10/2004

22

Interpolazione quadratica

Per tre punti assegnati $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$:

$$\begin{aligned}
 p_2(x) &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
 &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right] - \left[\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] (x - x_0)(x - x_1) \\
 &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\
 &\quad + \left(\left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) \right] (x - x_0) \right) - \left(\left[\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) \right] (x - x_1) \right)
 \end{aligned}$$

21/10/2004

23

Interpolazione di Newton

- Consideriamo la formula di recursione:

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0] = \frac{f[x_n, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, \dots, x_0]}{x_n - x_0}$$

where

$$f[x_i] = f(x_i)$$

- Per il termine quadratico:

$$\begin{aligned}
 b_2 &= f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \\
 &= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - b_1}{x_2 - x_0}
 \end{aligned}$$

21/10/2004

24

Valutazione in x_2

$$\begin{aligned} f(x_2) &= b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &= f_0 + \cancel{b_1}(x_2 - x_0) + \left(\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \cancel{b_1} \right) \cancel{(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

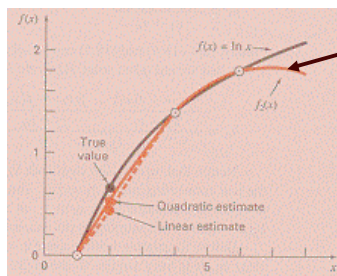
$$\begin{aligned} &= f_0 + b_1(x_1 - x_0) + f_2 - f_1 \\ &= f_0 + \left(\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \right) \cancel{(x_1 - x_0)} + f_2 - f_1 \\ &= f_2 \end{aligned}$$

21/10/2004

25

Esempio: $\ln(x)$

- Interpolazione di $\ln(2)$ assegnati i valori $\ln(1)$, $\ln(4)$ e $\ln(6)$
 - Punti assegnati: $\{(1,0), (4,1.3863), (6,1.79176)\}$
 - Interpolazione lineare: $0 + \{(1.3863-0)/(4-1)\}(x-1) = 0.4621(x-1)$
 - Interpolazione quadratica: $0.4621(x-1) + ((0.40546-1.3863)/2)(x-1)(x-4) = 0.4621(x-1) - 0.49(x-1)(x-4)$



21/10/2004

26

Esempio: $\ln(x)$

- L'interpolazione quadratica coglie un po' della curvatura.
- In qualche modo c'è un miglioramento dei risultati
- Non è sempre una buona idea aumentare l'ordine del polinomio

21/10/2004

27

Calcolo dei b_n

- Una tabella di *differenza-divisa* può essere costruita in modo incrementale.
- Si consideri, per esempio, la funzione $\ln(x)$.

x	$\ln(x)$
1	0.000000
2	0.693147
3	1.098612
4	1.386294
5	1.609438
6	1.791759
7	1.945910
8	2.079442
x	$\ln(x)$

21/10/2004

28

Calcolo dei b_n

x	ln(x)	f[i,i+1]
1	0.000000	
2	0.693147	0.693147
3	1.098612	0.405465
4	1.386294	0.287682
5	1.609438	0.223144
6	1.791759	0.182322
7	1.945910	0.154151
8	2.079442	0.133531
x	ln(x)	b10-b9)/(A10-A9

$$f[i,i+1] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

21/10/2004

29

Calcolo dei b_n

x	ln(x)	f[i,i+1]	
1	0.000000		
2	0.693147	0.693147	
3	1.098612	0.405465	-0.143841
4	1.386294	0.287682	-0.058892
5	1.609438	0.223144	-0.032269
6	1.791759	0.182322	-0.020411
7	1.945910	0.154151	-0.014085
8	2.079442	0.133531	-0.010310
x	ln(x)	b10-b9)/(A10-A9	c10-c9)/(a10-a8

$$f[i+1,i+2] = \frac{f[i+1,i+2] - f[i,i+1]}{(x_{i+2} - x_i)}$$

21/10/2004

30

Calcolo dei b_n

$$f[i, \dots, i+3] = \frac{f[i+1, i+2, i+3] - f[i, i+1, i+2]}{(x_{i+3} - x_i)}$$

x	ln(x)	f[i,i+1]			
1	0.000000				
2	0.693147	0.693147			
3	1.098612	0.405465	-0.143841		
4	1.386294	0.287682	-0.058892	0.028317	
5	1.609438	0.223144	-0.032269	0.008874	
6	1.791759	0.182322	-0.020411	0.003953	
7	1.945910	0.154151	-0.014085	0.002109	
8	2.079442	0.133531	-0.010310	0.001259	
x	ln(x)	b10-b9)/(A10-A9	c10-c9)/(a10-a8	b10-d9)/(a10-a7	

21/10/2004

31

Calcolo dei b_n

$$f[i, \dots, i+4] = \frac{f[i+1, \dots, i+4] - f[i, \dots, i+3]}{(x_{i+4} - x_i)}$$

x	ln(x)	f[i,i+1]				
1	0.000000					
2	0.693147	0.693147				
3	1.098612	0.405465	-0.143841			
4	1.386294	0.287682	-0.058892	0.028317		
5	1.609438	0.223144	-0.032269	0.008874	-0.004861	
6	1.791759	0.182322	-0.020411	0.003953	-0.001230	
7	1.945910	0.154151	-0.014085	0.002109	-0.000461	
8	2.079442	0.133531	-0.010310	0.001259	-0.000212	
x	ln(x)	b10-b9)/(A10-A9	c10-c9)/(a10-a8	b10-d9)/(a10-a7	d10-d9)/(a10-a6	

21/10/2004

32

Calcolo dei b_n

$$f[i, \dots, i+5] = \frac{f[i+1, \dots, i+5] - f[i, \dots, i+4]}{(x_{i+5} - x_i)}$$

x	ln(x)	f[i, i+1]				
1	0.000000					
2	0.693147	0.693147				
3	1.098612	0.405465	-0.143841			
4	1.386294	0.287682	-0.058892	0.028317		
5	1.609438	0.223144	-0.032269	0.008874	-0.004861	
6	1.791759	0.182322	-0.020411	0.003953	-0.001230	0.000726
7	1.945910	0.154151	-0.014085	0.002109	-0.000461	0.000154
8	2.079442	0.133531	-0.010310	0.001259	-0.000212	0.000050
x	ln(x)	b10-b9)/(A10-A9	c10-c9)/(a10-a8	d10-d9)/(a10-a7	d10-d9)/(a10-a6	e10-e9)/(a10-a5

21/10/2004

33

Calcolo dei b_n

$$f[i, \dots, i+6] = \frac{f[i+1, \dots, i+6] - f[i, \dots, i+5]}{(x_{i+6} - x_i)}$$

x	ln(x)	f[i, i+1]					
1	0.000000						
2	0.693147	0.693147					
3	1.098612	0.405465	-0.143841				
4	1.386294	0.287682	-0.058892	0.028317			
5	1.609438	0.223144	-0.032269	0.008874	-0.004861		
6	1.791759	0.182322	-0.020411	0.003953	-0.001230	0.000726	
7	1.945910	0.154151	-0.014085	0.002109	-0.000461	0.000154	-0.000095
8	2.079442	0.133531	-0.010310	0.001259	-0.000212	0.000050	-0.000017
x	ln(x)	b10-b9)/(A10-A9	c10-c9)/(a10-a8	d10-d9)/(a10-a7	d10-d9)/(a10-a6	e10-e9)/(a10-a5	f10-f9)/(a10-a4

21/10/2004

34

Calcolo dei b

$$f[i, \dots, i+7] = \frac{f[i+1, \dots, i+7] - f[i, \dots, i+6]}{(x_{i+7} - x_i)}$$

x	ln(x)	f[i,i+1]						f[i,i+1,...,i+7]
1	0.000000							
2	0.693147	0.693147						
3	1.098612	0.405465	-0.143841					
4	1.386294	0.287682	-0.058892	0.028317				
5	1.609438	0.223144	-0.032269	0.008874	-0.004861			
6	1.791759	0.182322	-0.020411	0.003953	-0.001230	0.000726		
7	1.945910	0.154151	-0.014085	0.002109	-0.000461	0.000154	-0.000095	
8	2.079442	0.133531	-0.010310	0.001259	-0.000212	0.000050	-0.000017	0.000011
x	ln(x)	b10-b9)/(A10-A9	c10-c9)/(a10-a8	d10-d9)/(a10-a7	e10-e9)/(a10-a6	f10-f9)/(a10-a5	g10-g9)/(a10-a4	

21/10/2004

35

Aggiunta di un nuovo punto

Aggiungere un nuovo punto, equivale ad aggiungere un nuovo termine al polinomio esistente.

x	ln(x)	f[i,i+1]						f[i,i+1,...,i+7]
1.0000000	0.0000000							
2.0000000	0.6931472	0.6931472						
3.0000000	1.0986123	0.4054651	-0.1438410					
4.0000000	1.3862944	0.2876821	-0.0588915	0.0283165				
5.0000000	1.6094379	0.2231436	-0.0322693	0.0088741	-0.0048606			
6.0000000	1.7917595	0.1823216	-0.0204110	0.0039528	-0.0012303	0.0007261		
7.0000000	1.9459101	0.1541507	-0.0140854	0.0021085	-0.0004611	0.0001539	-0.0000954	
8.0000000	2.0794415	0.1335314	-0.0103096	0.0012586	-0.0002125	0.0000497	-0.0000174	0.0000111
1.5000000	0.4054651	0.2575348	-0.0225461	0.0027192	-0.0004173	0.0000819	-0.0000215	0.0000082
								-0.0000058

21/10/2004

36

Unicità

- Supponiamo esistano due polinomi di grado n che interpolino gli $n+1$ punti assegnati.
- La loro differenza e' un nuovo polinomio di al piu' grado n .

$$r_n(x) = p_n(x) - q_n(x)$$

21/10/2004

37

Unicità

- Poiche' sia p che q interpolano gli $n+1$ punti assegnati,
- il polinomio r , ha almeno $n+1$ radici!!!
- Cio' e' impossibile! Un polinomio di grado n puo' avere al piu' n radici.

$$p_n(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - r_i)$$

- Quindi, $r(x) \equiv 0$

$$p_{n+1}(x) = a_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} (x - r_i)$$

21/10/2004

38

Errore d'interpolazione

- Si definisce errore dell'interpolazione la funzione:

$$\mathcal{E}_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

- Se $f(x)$ e' un polinomio di ordine n , $p_n(x)$ e' esatto.
- Altrimenti, poiche' c' e' un'uguaglianza perfetta in x_0, x_1, \dots, x_n , la funzione errore ha almeno $n+1$ radici nei punti d'interpolazione:

$$\therefore \mathcal{E}_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) h(x)$$

↓
Da stimare

21/10/2004

39

Errore d'interpolazione

Si dimostra che la funzione errore puo' essere scritta nella forma seguente:

$$\mathcal{E}_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$$x \in [a, b], \xi \in (a, b)$$

Notare che l'errore si annulla nei punti assegnati x_i

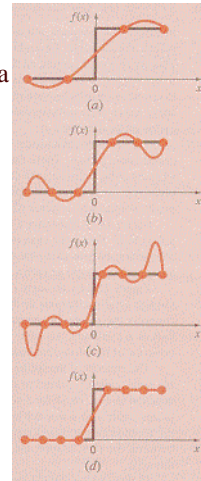
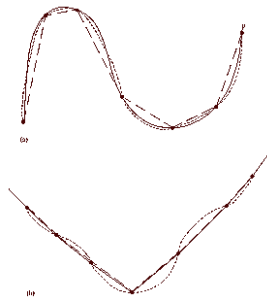
Fissato il termine della derivata n -esima, la funzione avra' le variazioni piu' grandi vicino ai bordi. Piu' grande n e piu' grandi le variazioni.

21/10/2004

40

Problemi

- E' sembra una buona idea usare polinomi di ordine via via superiore?
- Tendenza del polinomio a "oscillare"



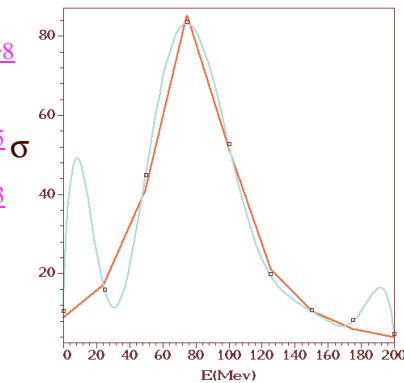
21/10/2004

41

Esempio

- Dati da esperimento di scattering di neutroni (9 punti)
- Interpolazione con polinomio di ordine 8
- Curva teorica (campionata in 8 punti)

$$\begin{aligned}
 P = & -0.1155169514e-12 * t^8 \\
 & + 0.9976360564e-10 * t^7 \\
 & - 0.3542968868e-7 * t^6 \\
 & + 0.6631473745e-5 * t^5 \\
 & - 0.6942546193e-3 * t^4 \\
 & + 0.3955373764e-1 * t^3 \\
 & - 1.093302933 * t^2 \\
 & + 11.40713806 * t \\
 & + 10.6
 \end{aligned}$$



L'ordine elevato del polinomio comporta oscillazioni indesiderate.

21/10/2004

42

Perche' usare Splines ?

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

Tabella : Sei punti equispaziati in [-1,1] -

x	$y = \frac{1}{1 + 25x^2}$
-1.0	0.038461
-0.6	0.1
-0.2	0.5
0.2	0.5
0.6	0.1
1.0	0.038461

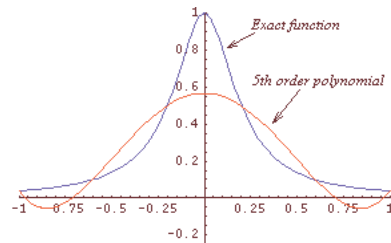
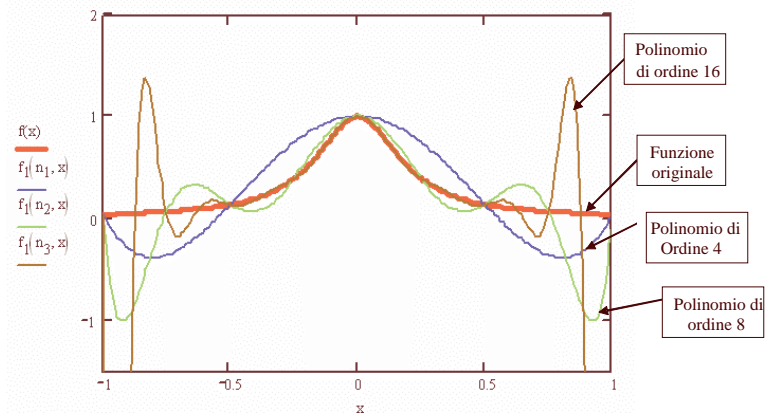


Figura :Polinomio del quinto ordine vs. funzione esatta

21/10/2004

43

Perche' usare Splines ?



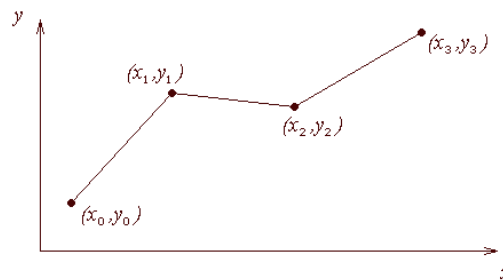
21/10/2004

44

Interpolazione lineare

Dati $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$, fare un fir lineare dei dati. Questo corrisponde a connettere dati consecutivi con segmenti.

Figura : Splines lineare



21/10/2004

45

Interpolazione lineare

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0), & x_0 \leq x \leq x_1 \\ &= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ &\vdots \\ &= f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_{n-1}), & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{aligned}$$

Notare che i termini del tipo

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \quad \text{Sono semplicemente delle pendenze tra } x_{i-1} \text{ e } x_i$$

21/10/2004

46

Esempio

La velocità verticale di un razzo è data in funzione del tempo nella Tabella 1. Trovare la velocità a $t=16$ secondi usando le splines lineari.

t	v(t)
s	m/s
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

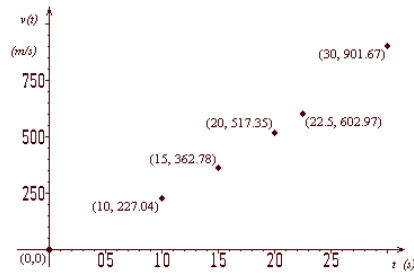


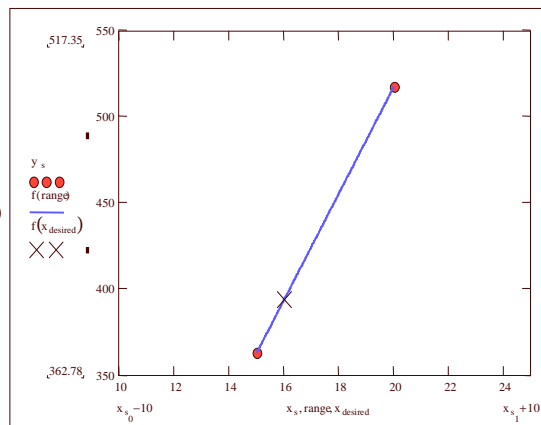
Figura : Dati della velocità vs. tempo per il razzo

21/10/2004

47

Interpolazione lineare

$$\begin{aligned}
 t_0 &= 15, & v(t_0) &= 362.78 \\
 t_1 &= 20, & v(t_1) &= 517.35 \\
 v(t) &= v(t_0) + \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} (t - t_0) \\
 &= 362.78 + \frac{517.35 - 362.78}{20 - 15} (t - 15) \\
 v(t) &= 362.78 + 30.913(t - 15) \\
 \text{At } t &= 16, \\
 v(16) &= 362.78 + 30.913(16 - 15) \\
 &= 393.7 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$



21/10/2004

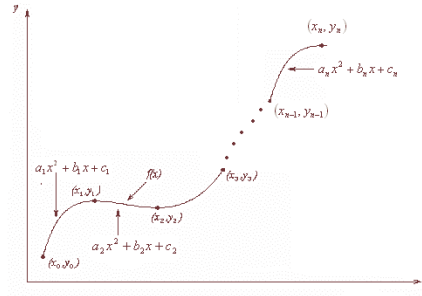
48

Interpolazione quadratica

Dati $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$, fittarli con splines quadratiche

date da

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_1x^2 + b_1x + c_1, & x_0 \leq x \leq x_1 \\
 &= a_2x^2 + b_2x + c_2, & x_1 \leq x \leq x_2 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &= a_nx^2 + b_nx + c_n, & x_{n-1} \leq x \leq x_n
 \end{aligned}$$



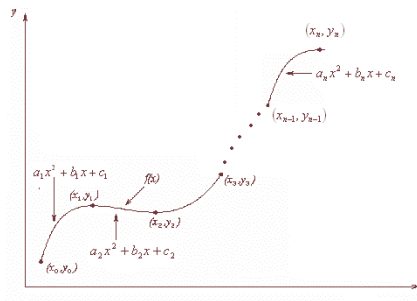
21/10/2004

49

Interpolazione quadratica

Poiche' ogni spline quadratica passa attraverso due punti consecutivi

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &\rightarrow \begin{aligned} a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 &= f(x_0) \\ a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1 &= f(x_1) \end{aligned} \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 f_i(x) &\rightarrow \begin{aligned} a_ix_{i-1}^2 + b_ix_{i-1} + c_i &= f(x_{i-1}) \\ a_ix_i^2 + b_ix_i + c_i &= f(x_i) \end{aligned} \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 f_n(x) &\rightarrow \begin{aligned} a_nx_{n-1}^2 + b_nx_{n-1} + c_n &= f(x_{n-1}) \\ a_nx_n^2 + b_nx_n + c_n &= f(x_n) \end{aligned}
 \end{aligned}$$



Questa condizione fornisce 2n equazioni

21/10/2004

50

Interpolazione quadratica

Le derivate prime di due splines quadratiche sono continue nei punti interni

Per esempio, la derivata della prima spline

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 \text{ vale } 2a_1x + b_1 \rightarrow f_1^{(1)}(x)$$

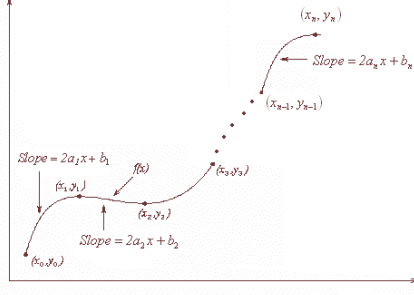
La derivata della seconda spline

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 \text{ vale } 2a_2x + b_2 \rightarrow f_2^{(1)}(x)$$

E le due sono uguali in $x = x_1$ cioè

$$2a_1x_1 + b_1 = 2a_2x_1 + b_2 \rightarrow f_2^{(1)}(x_1) = f_1^{(1)}(x_1)$$

$$2a_1x_1 + b_1 - 2a_2x_1 - b_2 = 0$$



n.b. Le condizioni di cui sopra equivalgono a richiedere:

21/10/2004

$$f_i^{(1)}(x_i) = f_{i+1}^{(1)}(x_i), \quad i = 1, n-1$$

51

Interpolazione quadratica

Nello stesso modo, negli altri punti interni

$$2a_2x_2 + b_2 - 2a_3x_2 - b_3 = 0$$

·

·

·

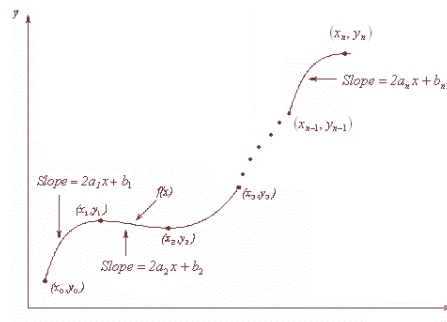
$$2a_i x_i + b_i - 2a_{i+1} x_i - b_{i+1} = 0$$

·

·

·

$$2a_{n-1} x_{n-1} + b_{n-1} - 2a_n x_{n-1} - b_n = 0$$



Si hanno quindi $(n-1)$ equazioni. Il numero totale di equazioni e' $(2n) + (n-1) = (3n-1)$.

n.b. Le condizioni di cui sopra equivalgono a richiedere:

$$f_i^{(1)}(x_i) = f_{i+1}^{(1)}(x_i), \quad i = 1, n-1$$

Possiamo assumere che la prima spline sia lineare, cioè $a_1 = 0$ **Spline naturale**: derivata prima nulla

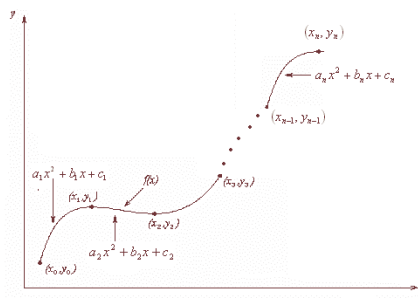
21/10/2004

52

Interpolazione quadratica

Si ha quindi un totale di $3n$ equazioni a fronte di $3n$ incognite. Una volta note le $3n$ costanti si può calcolare la funzione in ogni punto x usando la splines.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_1x^2 + b_1x + c_1, & x_0 \leq x \leq x_1 \\
 &= a_2x^2 + b_2x + c_2, & x_1 \leq x \leq x_2 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &= a_nx^2 + b_nx + c_n, & x_{n-1} \leq x \leq x_n
 \end{aligned}$$



21/10/2004

53

Esempio

La velocità verticale di un razzo è data in funzione del tempo nella Tabella. Trovare la velocità a $t=16$ secondi usando le splines quadratiche.

t	v(t)
s	m/s
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

Tabella : Velocità in funzione del tempo

21/10/2004

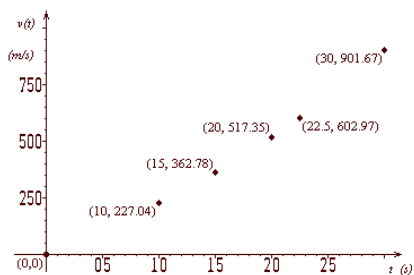


Figura : Dati della velocità vs. tempo per il razzo

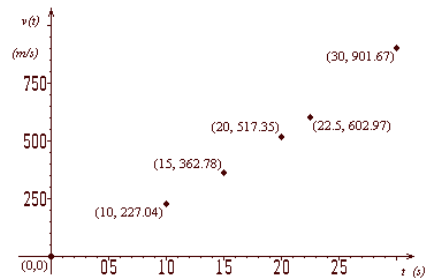


54

Soluzione

Poiche' ci sono 6 punti, usiamo cinque splines quadratiche:

$$\begin{aligned} v(t) &= a_1 t^2 + b_1 t + c_1, & 0 \leq t \leq 10 \\ &= a_2 t^2 + b_2 t + c_2, & 10 \leq t \leq 15 \\ &= a_3 t^2 + b_3 t + c_3, & 15 \leq t \leq 20 \\ &= a_4 t^2 + b_4 t + c_4, & 20 \leq t \leq 22.5 \\ &= a_5 t^2 + b_5 t + c_5, & 22.5 \leq t \leq 30 \end{aligned}$$



21/10/2004

55

Soluzione

Costruiamo le equazioni:

- Ogni spline quadratica passa attraverso due punti consecutivi e quindi

$$a_1 t^2 + b_1 t + c_1 \text{ passa attraverso } t = 0 \text{ e } t = 10,$$

$$a_1(0)^2 + b_1(0) + c_1 = 0 \quad (1)$$

$$a_1(10)^2 + b_1(10) + c_1 = 227.04 \quad (2)$$

Nello stesso modo

$$a_2(10)^2 + b_2(10) + c_2 = 227.04 \quad (3)$$

$$a_2(15)^2 + b_2(15) + c_2 = 362.78 \quad (4)$$

$$a_3(15)^2 + b_3(15) + c_3 = 362.78 \quad (5)$$

$$a_3(20)^2 + b_3(20) + c_3 = 517.35 \quad (6)$$

$$a_4(20)^2 + b_4(20) + c_4 = 517.35 \quad (7)$$

$$a_4(22.5)^2 + b_4(22.5) + c_4 = 602.97 \quad (8)$$

$$a_5(22.5)^2 + b_5(22.5) + c_5 = 602.97 \quad (9)$$

$$a_5(30)^2 + b_5(30) + c_5 = 901.67 \quad (10)$$

21/10/2004

56

Soluzione

Risolviendo il sistema si ottengono le 15 costanti

i	a_i	b_i	c_i
1	0	22.704	0
2	0.8888	4.928	88.88
3	-0.1356	35.66	-141.61
4	1.6048	-33.956	554.55
5	0.20889	28.86	-152.13

21/10/2004

59

Soluzione

Quindi le splines sono date da:

$$\begin{aligned}
 v(t) &= 22.704t, & 0 \leq t \leq 10 \\
 &= 0.8888t^2 + 4.928t + 88.88, & 10 \leq t \leq 15 \\
 &= -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, & 15 \leq t \leq 20 \\
 &= 1.6048t^2 - 33.956t + 554.55, & 20 \leq t \leq 22.5 \\
 &= 0.20889t^2 + 28.86t - 152.13, & 22.5 \leq t \leq 30
 \end{aligned}$$

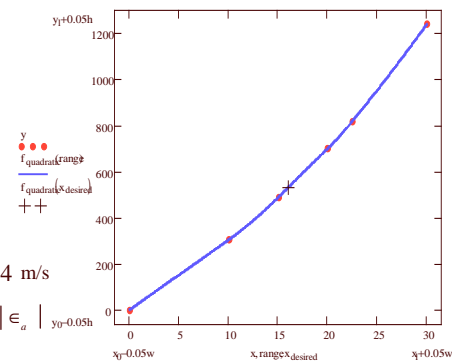
A $t = 16$

$$v(16) = -0.1356(16)^2 + 35.66(16) - 141.61 = 394.24 \text{ m/s}$$

Il valore assoluto dell'errore di approssimazione relativo, $|\epsilon_a|$

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{394.24 - 393.7}{394.24} \right| \times 100$$

$$= 0.1369\%$$



21/10/2004

60

Accelerazione del razzo in $t=16s$

Trovare l'accelerazione del razzo in $t=16s$.

$$a(16) = \frac{d}{dt} v(t) \Big|_{t=16}$$

La spline quadratica valida in $t=16$ e' data da

$$v(t) = -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, \quad 15 \leq t \leq 20$$

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} (-0.1356t^2 + 35.66t - 141.61)$$

$$a(t) = -0.2712t + 35.66 \quad 15 \leq t \leq 20$$

$$a(16) = -0.2712(16) + 35.66$$

$$= 31.321 \text{ m/s}^2$$

21/10/2004

61

Spline cubica

Spline piu' utilizzata in quanto permette di avere una curva abbastanza Regolare (derivate prime e seconde continue agli estremi degli intervalli).

Si approssima la $f(x)$ nel sottointervallo $[x_i, x_{i+1}]$ con un polinomio **cubico**:

$$f(x) \cong f_i(x), \quad \text{per } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i = 0, n-1$$

$$f_i(x) = f_i + f_i^{(1)}(x-x_i) + \frac{1}{2} f_i^{(2)}(x-x_i)^2 + \frac{1}{6} f_i^{(3)}(x-x_i)^3.$$

Scritte in questo modo si vede subito che i coefficienti del polinomio sono legati alle derivate, prime, seconde e terze dello stesso.

4n incognite

Ogni f_i deve passare per i due punti x_i e x_{i+1} dell'intervallo

$$f_i(x_i) = y_i, \quad f_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad i = 0, n-1.$$

n intervalli

2n equazioni

La continuita' delle derivate prime e seconde ai (nodi) e' data da:

$$f_i^{(1)}(x_{i+1}) = f_{i+1}^{(1)}(x_{i+1}), \quad f_i^{(2)}(x_{i+1}) = f_{i+1}^{(2)}(x_{i+1}),$$

$$i = 0, n-2.$$

2n-2 equazioni

21/10/2004

62

Spline cubica

Le restanti 2 relazioni si ottengono specificando delle condizioni al contorno per i punti estremi $a=x_0$ e $b=x_n$:

Spline naturale: $f^{(2)}(a) = 0, \quad f^{(2)}(b) = 0$

Valori di $f^{(1)}$ agli estremi: $f^{(1)}(a) = c_1, \quad f^{(1)}(b) = c_2$

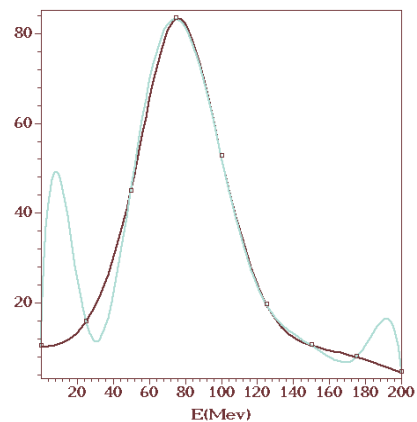
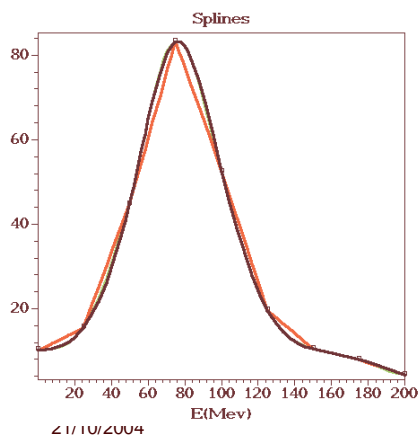
Valori di $f^{(2)}$ agli estremi: $f^{(2)}(a) = c_1, \quad f^{(2)}(b) = c_2$

21/10/2004

63

Esempio dello scattering

- Dati da esperimento di scattering (9 punti) Interpolazione con polinomio di ordine 8
 Spline lineare Spline quadratica Spline cubica



Interpolazione con funzioni razionali



Alcune funzioni si approssimano meglio con rapporti di polinomi:

$$R(x) = \frac{P_l(x)}{Q_m(x)} = \frac{p_0 + p_1x + \dots + p_lx^l}{q_0 + q_1x + \dots + q_mx^m}$$

- Questa forma puo' modellare funzioni con poli
- $R(x)$ passa attraverso N punti con $N=l+m+1$
- Formule di ricorrenza del tipo di Neville anche in questo caso (algoritmo di Bulirsch-Stoer)

Vedi routine **ratin** in Numerical Recipes