

Metodi Computazionali della Fisica
A.A. 2004/2005



Integrazione numerica

Programma a grandi linee



- Integrali definiti
- Somme superiori ed inferiori
 - Integrazione o somma di Riemann
- Campioni equispaziati
 - Regole del trapezio
 - Regole di Simpson
- Campioni non equispaziati
 - Formule di quadratura di Gauss

Introduzione

Cosa rappresenta un integrale?

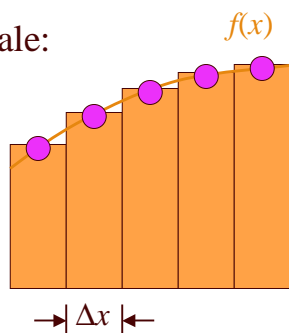
$$\int_a^b f(x)dx = \text{area} \quad \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy = \text{volume}$$

Definizione di base di un integrale:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$

dove
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

somma di altezze \times basi



03/11/2004

Met. Comp. Fis.

3

Motivazione

- Valutare l'integrale, $I = \int_a^b f(x)dx$ senza calcolarlo analiticamente.

- Necessario quando:

- L'integrando e' troppo complicato per farlo analiticamente

$$\int_0^2 \frac{2 + \cos(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{1 + 0.5x}} e^{0.5x} dx$$

- L'integrando non e' definito da una funzione ma si ha solo un insieme, di punti (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3, \dots, n$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

4

Integrale di Riemann

- L'integrazione e' un processo di somma. Tutte le approssimazioni numeriche possono essere rappresentate da

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E_t$$

dove w_i sono i pesi, x_i sono i punti campionati, e E_t e' l'errore di troncamento

- Valida per ogni funzione che e' continua sull'intervallo chiuso e limitato d'integrazione.

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

5

Partizione dell'integrale

- La formula piu' comune d'integrazione numerica e' basata su un insieme di **punti equispaziati**.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

- Dividiamo $[x_0, x_n]$ in n **intervalli** ($n \geq 1$)

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) + \int_{x_1}^{x_2} f(x) + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

6

Somme superiori

- Assumiamo che $f(x) > 0$ ovunque.
- Se all'interno di ogni intervallo, e' possibile determinare il massimo della funzione, si ha:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$$

- dove

$$M_i = \sup \{ f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1} \}$$

*Supremo – piu'
piccolo limite
superiore*

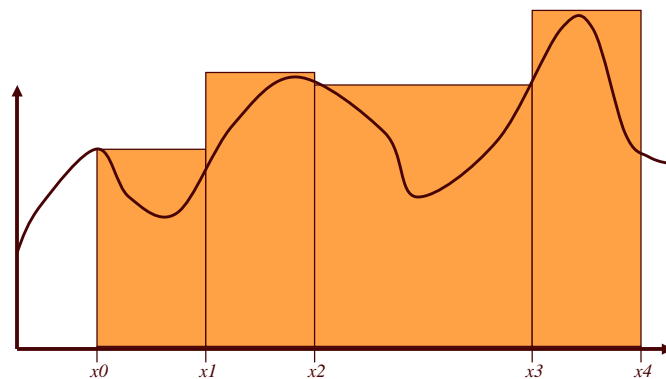
03/11/2004

Met. Comp. Fis.

7

Somme superiori

- Graficamente:



03/11/2004

Met. Comp. Fis.

8

Somme inferiori

- Assumiamo ancora che $f(x) > 0$ ovunque.
- Se in ogni intervallo e' possibile determinare il minimo della funzione, si ha:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) \geq \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$$

- dove

$$m_i = \inf \{ f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1} \}$$

*Infimo – piu'
grande limite
inferiore*

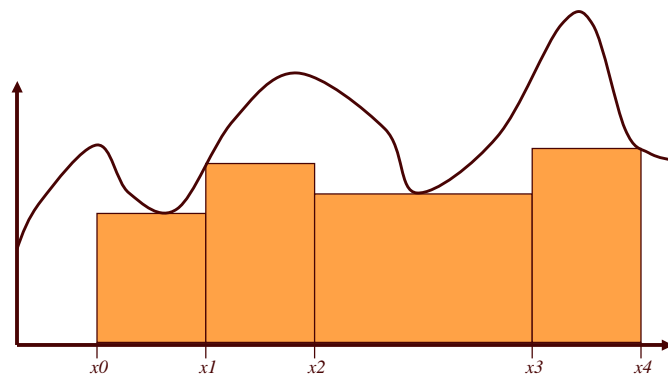
03/11/2004

Met. Comp. Fis.

9

Somme inferiori

- Graficamente



03/11/2004

Met. Comp. Fis.

10

Partizioni piu' fini

- Per una certa partizione (x_0, \dots, x_n) si ha:

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) \leq \int_{x_0}^{x_1} f(x) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$$

- Per $n \rightarrow \infty$, si assume che la somma dei limiti superiori e la somma dei limiti inferiori coincidano.
- Questo e' vero per molte funzioni che vengono dette Riemann-integrabili.

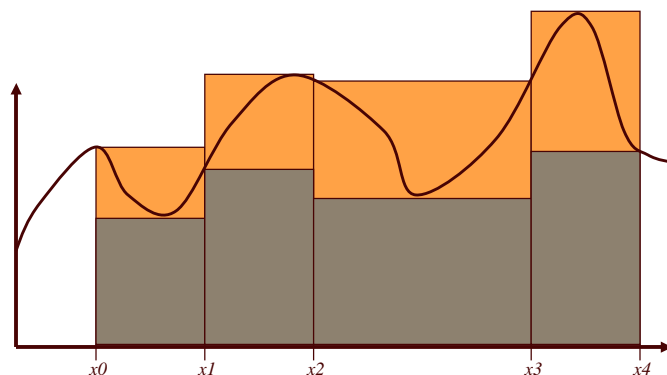
03/11/2004

Met. Comp. Fis.

11

Delimitazione dell'integrale

- Graficamente



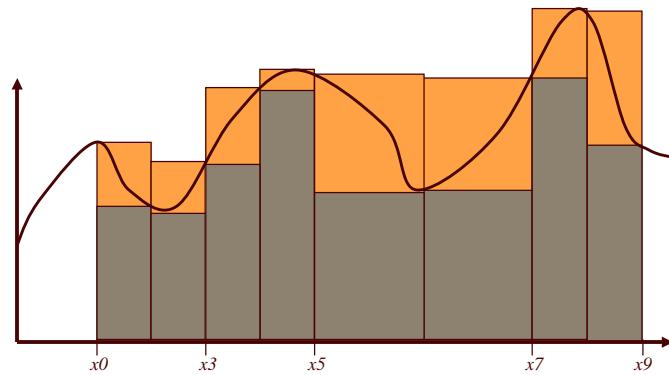
03/11/2004

Met. Comp. Fis.

12

Delimitazione dell'integrale

- Suddividendo ogni intervallo:



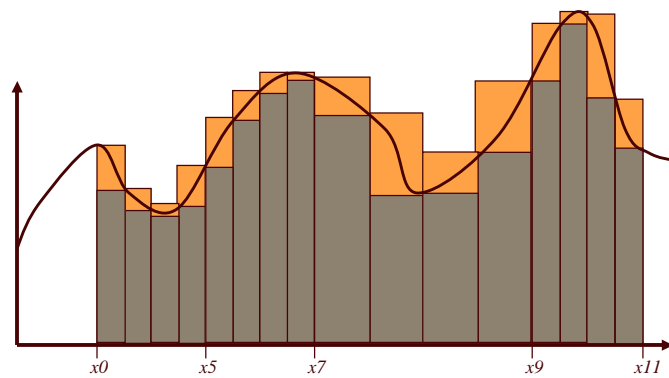
03/11/2004

Met. Comp. Fis.

13

Delimitazione dell'integrale

- Suddividendo un'altra volta:



03/11/2004

Met. Comp. Fis.

14

Funzioni monotone



- Le somme superiori ed inferiori sono interessanti ma non molto utili.
 - Riformulano il problema in termini di ricerca di minimi e massimi (globali) su un intervallo.
 - Un problema in generale molto piu' difficile.
- Le funzioni monotone forniscono comunque un semplice esempio (e.g., $\exp(x)$, $\tan(x)$, ...).

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

15

Funzioni monotone



- Una funzione monotona crescente ha la proprieta' che $f(x) \geq f(y)$, per ogni $x > y$ dell'intervallo.
- Una funzione monotona decrescente ha la proprieta' che $f(x) \leq f(y)$, per ogni $x > y$ dell'intervallo.

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

16

Funzioni monotone

- La somma superiore per una funzione monotona crescente e' quindi semplicemente la somma dei valori di destra.
- La somma inferiore usa invece il valore di sinistra.

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

17

Approssimazione polinomiale

- Invece di cercare il massimo o il minimo, si sostituisce $f(x)$ con una funzione nota e semplice.
- In ogni intervallo si approssima $f(x)$ con *un polinomio di grado m*.

$$p_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

18

Formule di Newton-Cotes

- L'ordine m (dei polinomi) puo' essere lo stesso o differente.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+m_1} p_{m_1}(x)dx + \int_{x_0+m_1}^{x_0+m_1+m_2} p_{m_2}(x)dx + \dots + \int_{x_{n-m_n}}^{x_n} p_{m_n}(x)dx$$

- Scelte diverse di m portano a formule diverse:

m	Polinomio	Formula	Errore
1	lineare	Trapezio	$O(h^2)$
2	quadratico	Simpson 1/3	$O(h^4)$
3	cubico	Simpson 3/8	$O(h^4)$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

19

Regola del trapezio

- E' il modo piu' semplice per approssimare l'area sottesa da una curva. Si usa un **polinomio del primo ordine** (una retta)
- Se si usa la formula di Newton per l'interpolazione:

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

- Inserendo nell'integrale:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

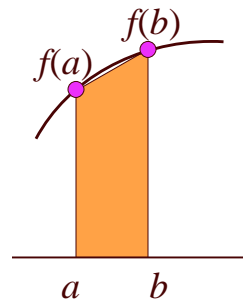
20

Regola del trapezio

$$I \approx \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right] dx$$

Regola del trapezio

$$I \approx \frac{(b - a)}{2} [f(a) + f(b)]$$



$I \approx \text{larghezza} \times \text{altezza media}$

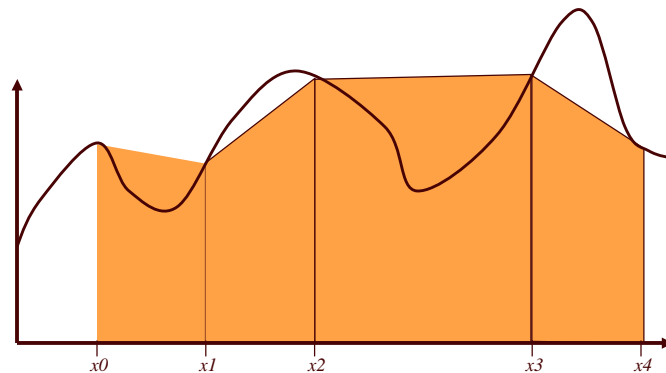
03/11/2004

Met. Comp. Fis.

21

Regola del trapezio

- Possibili miglioramenti?



03/11/2004

Met. Comp. Fis.

22

Errore nella regola del trapezio

- L'errore d'integrazione vale:

$$E_i = -\frac{1}{12} f''(\xi) h^3 = -\frac{(b-a)}{12} f''(\xi) h^2 \quad O(h^2)$$

- Dove $h = b - a$ e ξ e' un punto incognito tale che $a < \xi < b$ (teorema del valor medio)
- Si ha integrazione esatta se la funzione, f , e' lineare ($f'' = 0$)

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

23

Esempio

Integrare $f(x) = e^{-x^2}$ da $a = 0$ a $b = 2$

Con la regola del trapezio si ha:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 e^{-x^2} dx \\ &\approx \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)] = \frac{(2-0)}{2} [f(2) + f(0)] \\ &= 1 \times (e^{-4} + e^0) = 1.0183 \end{aligned}$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

24

Esempio (cont.)

Errore stimato: $E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi) h^3$

Dove $h = b - a$ e $a < \xi < b$

Non conoscendo ξ - si usa il valor medio

$$f''(x) = (-2 + 4x^2)e^{-x^2}$$

$$f''(0) = -2$$

$$h = 2 - 0 = 2$$

$$f''(2) = 0.2564$$

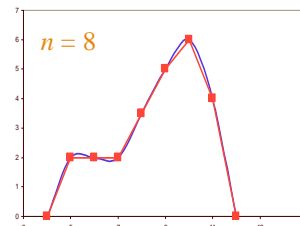
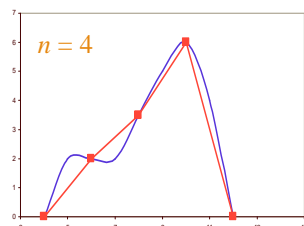
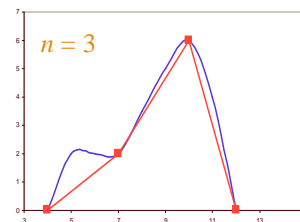
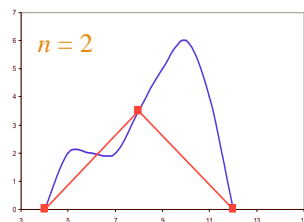
$$E_t \approx E_a = -\frac{2^3 [f''(0) + f''(2)]}{12 \cdot 2} = 0.58$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

25

Piu' intervalli, miglior risultato [error $\sim O(h^2)$]



03/11/2004

Met. Comp. Fis.

26

Regola del trapezio composta

- Usiamo $n+1$ punti equispaziati.
- Ogni intervallo ha:
- Suddividendo i limiti d'integrazione ed espandendo:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$I = \int_a^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)dx + \dots + \int_{b-h}^b f(x)dx$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

27

Regola del trapezio composta

- Sostituendo la regola del trapezio per ogni integrale

$$\begin{aligned}
 I &= \int_a^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)dx + \dots + \int_{b-h}^b f(x)dx \\
 &= \frac{(a+h-a)}{2} [f(a) + f(a+h)] + \frac{(a+2h-a-h)}{2} [f(a+h) + f(a+2h)] \\
 &\quad + \dots + \frac{(b-b+h)}{2} [f(b-h) + f(b)]
 \end{aligned}$$

- si ottiene la **formula del trapezio composta**:

$$I = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b) \right]$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

28

Regola del trapezio composta

- La si puo' vedere come *larghezza* moltiplicata per *l'altezza media*.

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b) \right] \\
 &= \underbrace{(b-a)}_{\text{larghezza}} \underbrace{\frac{f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)}{2n}}_{\text{Altezza media}}
 \end{aligned}$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

29

Regola del trapezio composta

$$I = \frac{h}{2} f(a) + h \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + \frac{h}{2} f(b)$$

N.B. Poiche' ogni punto interno viene contato due volte (condiviso da due intervalli contigui) ha un peso pari a h mentre i due estremi a e b hanno un peso pari a $h/2$.

E' interessante scrivere l'integrale approssimato come una **somma pesata**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) w_i$$

dove $w_i = \left\{ \frac{h}{2}, h, \dots, h, \frac{h}{2} \right\}$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

30

Errore della formula composta

- La stima dell'errore vale:

$$E_a = \frac{(b-a)h^2}{12} \bar{f}'' = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \bar{f}'' \quad O(h^2)$$

- Dove, \bar{f}'' e' il valor medio della derivata seconda.
- Se si raddoppia n , $h \rightarrow h/2$ e $E_a \rightarrow E_a/4$
- Notare che l'errore dipende dalla larghezza dell'area su cui si integra.

03/11/2004

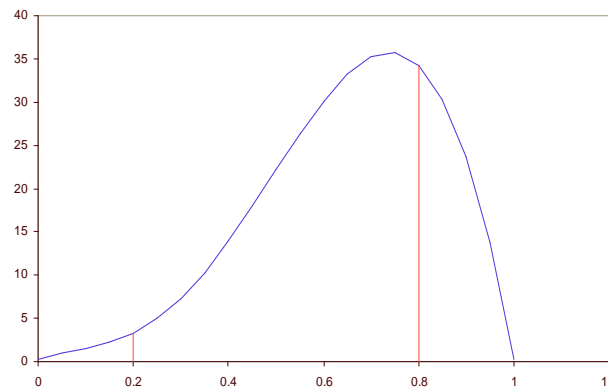
Met. Comp. Fis.

31

Esempio

- Integrare: $f(x) = 0.3 + 20x - 140x^2 + 730x^3 - 810x^4 + 200x^5$

- da
 $a=0.2$
a
 $b=0.8$



03/11/2004

Met. Comp. Fis.

32

Esempio

- Una singola applicazione della regola del trapezio fornisce:

$$\begin{aligned} I &= (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} \\ &= (0.8-0.2) \frac{34.22+3.81}{2} \\ &= 11.26 \end{aligned}$$

- Con errore: $E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

33

Esempio (cont.)

Poiche' non conosciamo ξ l'approssimiamo con il valor medio di f''

$$f'(x) = 20 - 280x + 2190x^2 - 3240x^3 + 1000x^4$$

$$f''(x) = -280 + 4380x - 9720x^2 + 4000x^3$$

$$\begin{aligned} \bar{f}''(x) &= \frac{\int_{0.2}^{0.8} f'' dx}{0.8-0.2} \\ &= \frac{f'(0.8) - f'(0.2)}{0.8-0.2} = -131.6 \end{aligned}$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

34

Esempio (cont.)

L'errore vale quindi:

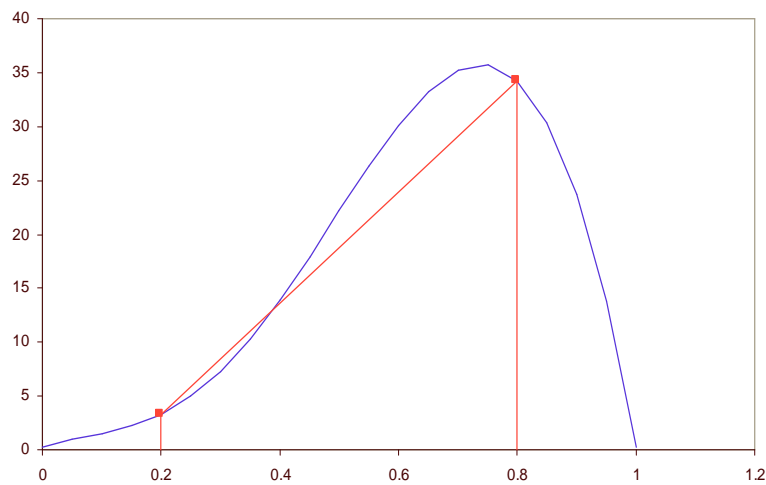
$$E_t = \frac{(b-a)h^2}{12} \bar{f}'' = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \bar{f}''$$
$$= -\frac{1}{12}(-131.6)(0.8-0.2)^3 = 2.37$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

35

Il valore esatto dell'integrale e' 12.82. La regola del trapezio fornisce 11.26 – con un errore, E_t , intorno al 12%



03/11/2004

Met. Comp. Fis.

36

Usando 3 intervalli

- Usiamo gli intervalli (0.2,0.4),(0.4,0.6),(0.6,0.8):
($n = 3, h = 0.2$)

$$\begin{aligned} I &= (b-a) \frac{f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)}{2n} \\ &= (0.8-0.2) \frac{f(0.2) + 2[f(0.4) + f(0.6)] + f(0.8)}{(2)(3)} \\ &= 0.6 \frac{3.31 + 2(13.93 + 30.16) + 34.22}{6} \\ &= 12.57 \end{aligned}$$

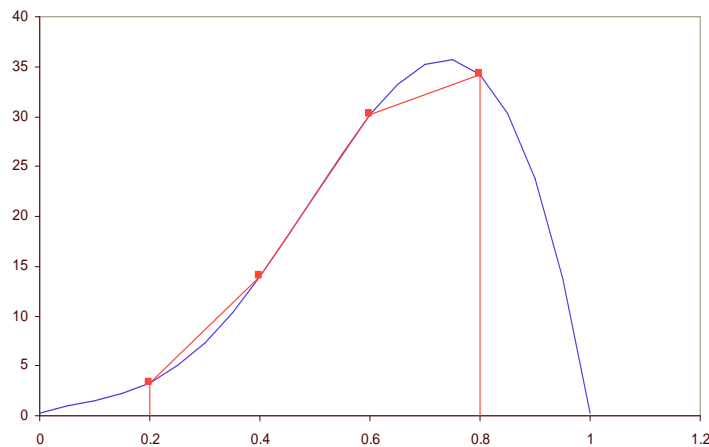
Il valore esatto dell'integrale e' 12.82

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

37

E_t e' ora circa il 2%



03/11/2004

Met. Comp. Fis.

38

Usando 6 intervalli ...

- Usiamo gli intervalli (0.2,0.3),(0.3,0.4), etc.
 - ($n = 6, h = 0.1$)

$$I = (0.8 - 0.2) \frac{f(0.2) + 2[f(0.3) + f(0.4) + f(0.5) + f(0.6) + f(0.7)] + f(0.8)}{(2)(6)}$$
$$= 0.6 \frac{3.31 + 2(7.34 + 13.93 + 22.18 + 30.16 + 35.22) + 34.22}{12}$$
$$= 12.76$$

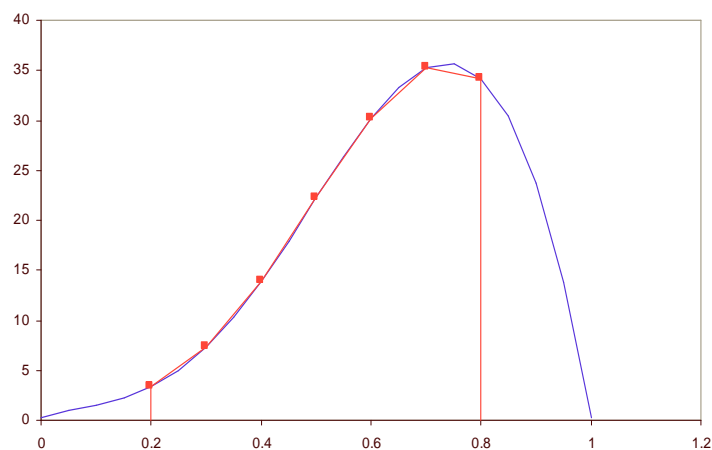
Valore esatto 12.82

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

39

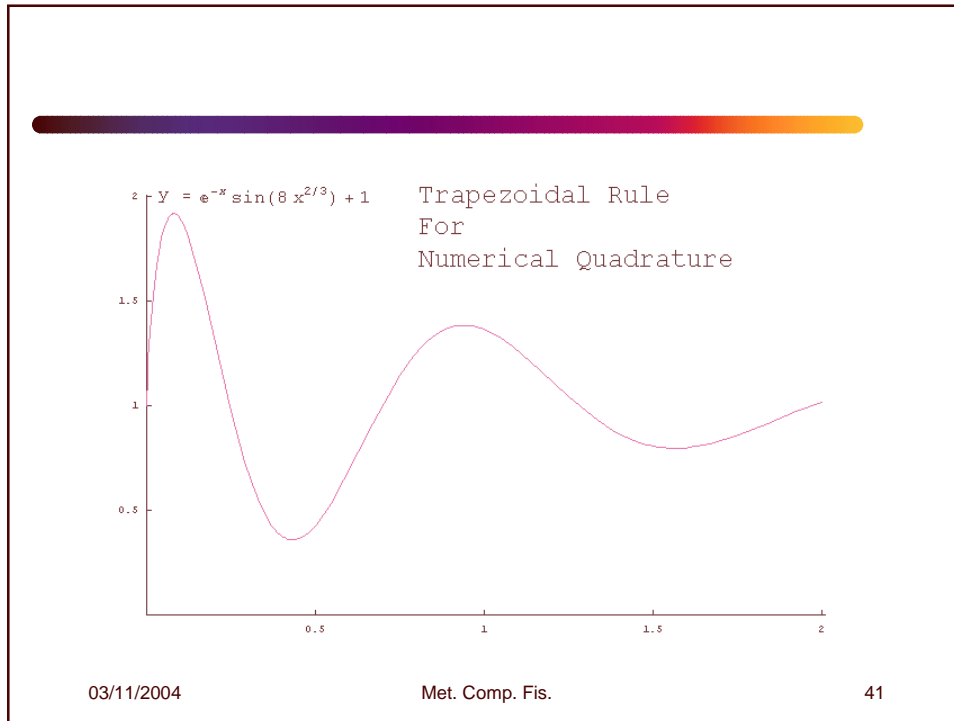
E_t e' ora intorno allo 0.5%



03/11/2004

Met. Comp. Fis.

40



$$I = \frac{h}{2} f(a) + h \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + \frac{h}{2} f(b)$$

```

routine trapezio(float func,float a,float b,int n)
float h,sum,s
int j
h ← (b-a)/n
sum ← 0
x ← a
for j=1 to n-1 by 1 do
  x ← x+h
  sum ← sum+func(x)
end for
s=0.5*h*(func(a)+func(b))+h*sum
return(s)

```

input
func; funzione da integrare
n: ordine dell'integrazione
a,b: estremi integrazione

output
s: integrale approssimato

03/11/2004 Met. Comp. Fis. 42

Modi per ridurre l' errore

- Per migliorare la stima dell'integrale si possono fare le seguenti cose:
 - Aggiungere piu' intervalli
 - Usare un polinomio di ordine superiore
 - Usare il metodo di estrapolazione di Richardson per stimare il limite $h \rightarrow 0$.
 - Il metodo del Trapezio + l'extrapolazione di Richardson e' noto come integrazione di Romberg.

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

43

Aggiungere piu' intervalli

Se si ha una stima per un valore di h ,
occorre ricalcolare tutto di nuovo per un
valore di $h/2$?

Partiamo dalla formula per n intervalli ciascuno di
larghezza h ;

$$I_h = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b) \right]$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

44

Aggiungere piu' intervalli

Se poniamo ora $n \rightarrow 2n$ e $h \rightarrow h/2$, la formula diventa:

$$\begin{aligned} I_{\frac{h}{2}} &= \frac{h}{4} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{2n-1} f\left(a + i \frac{h}{2}\right) + f(b) \right] \\ &= \frac{h}{4} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) + 2 \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + ih + \frac{h}{2}\right) + f(b) \right] \\ &= \frac{I_h}{2} + \frac{h}{4} \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + ih + \frac{h}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Si parla di **Regola del trapezio recursiva**. $n > 1$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

45

Integrali bidimensionali

- Caso di integrazione bidimensionale.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy &\approx \int_0^1 \sum_{i=0}^n A_i f\left(\frac{i}{n}, y\right) dy \\ &= \sum_{i=0}^n A_i \int_0^1 f\left(\frac{i}{n}, y\right) dy \\ &\approx \sum_{i=0}^n A_i \sum_{j=0}^n A_j f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n A_i A_j f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \end{aligned}$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

46

Integrali bidimensionali

Con la regola del trapezio si ottiene la seguente matrice di pesi:

1	1	2	2	2	2	2	1
2	2	4	4	4	4	4	2
2	2	4	4	4	4	4	2
2	2	4	4	4	4	4	2
2	2	4	4	4	4	4	2
2	2	4	4	4	4	4	2
1	1	2	2	2	2	2	1

$$A_{ij} = \frac{1}{4n^2} \begin{cases} 1 & i \in \{0, n\} & j \in \{0, n\} \\ 2 & i \in [1, \dots, n-2] & j \in \{1, n-1\} \\ 2 & i \in \{1, n-1\} & j \in [1, \dots, n-1] \\ 4 & i \in [1, \dots, n-2] & j \in [1, \dots, n-2] \end{cases}$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

47

Integrali bidimensionali

- Se si usano I pesi della regola del trapezio, l'errore e ancora di ordine $O(h^2)$.
- Tuttavia vi sono ora n^2 valutazioni della funzione f.
- Si parla di campioni equispaziati su una regione quadrata.

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

48

Integrali multidimensionali

- In generale, per k dimensioni, occorre valutare la funzione $N = n^k$ volte e quindi:

$$O(h^2) = O(n^{-2}) = O\left((n^k)^{-\frac{2}{k}}\right) = O\left(N^{-\frac{2}{k}}\right)$$

- Se la dimensione e' alta, il passaggio $h \rightarrow h/2$ richiede un grande lavoro di calcolo.
 - Vedere piu' avanti il metodo Monte-Carlo.

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

49

Polinomi di ordine superiore

- Ricordiamo la formula di Newton-Cotes:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+m_1} p_{m_1}(x) dx + \int_{x_0+m_1}^{x_0+m_1+m_2} p_{m_2}(x) dx + \dots + \int_{x_{n-m_n}}^{x_n} p_{m_n}(x) dx$$

m	Polinomio	Formula	Errore
1	lineare	Trapezio	$O(h^2)$
2	quadratico	Simpson 1/3	$O(h^4)$
3	cubico	Simpson 3/8	$O(h^4)$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

50

Regola 1/3 di Simpson

- Interpoliamo ora con un polinomio di secondo grado (occorrono in questo caso 3 punti o 2 intervalli):

$$\left(x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}\right)$$

Nella forma di Lagrange:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

Ricordiamo che in genere: $x_0 = a$, $x_2 = b$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

51

Regola 1/3 di Simpson

Richiedendo intervalli equispaziati ($x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$) ha:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_0-h)(x-x_0-2h)}{-h(-2h)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_0-2h)}{(h)(-h)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{(2h)(h)} f(x_2) \right] dx$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

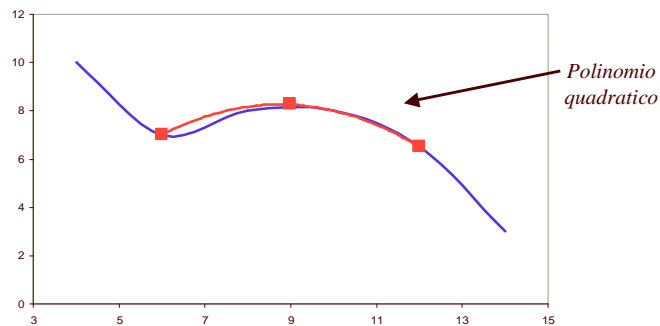
52

Regola 1/3 di Simpson

Integrando e semplificando:

$$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$



03/11/2004

Met. Comp. Fis.

53

Regola 1/3 di Simpson

Se si usa $a = x_0$ e $b = x_2$, e $x_1 = (b+a)/2$

$$I \approx \underbrace{(b-a)}_{\text{larghezza}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}}_{\text{Altezza media}}$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

54

Regola 1/3 di Simpson

- L'errore per la regola 1/3 di Simpson vale:

$$E_t = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) \quad O(h^4)$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

⇒ Se si integra una cubica il valore che si ottiene e' esatto cioe':

$$f^{(4)}(\xi) = 0$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

55

Regola 1/3 di Simpson composta

- Come per la regola del trapezio si puo' suddividere l'intervallo in n intervalli e applicare la regola 1/3 di Simpson varie volte.

N.B. Poiche' sono necessari un numero **dispari di punti** (una parabola passa per 3 punti) occorre un numero **pari di intervalli**.

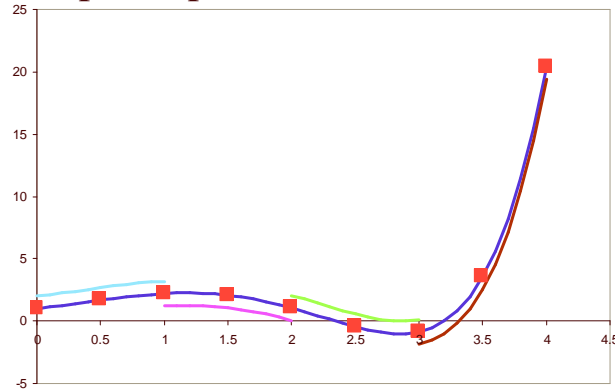
03/11/2004

Met. Comp. Fis.

56

Regola 1/3 di Simpson composta

- Esempio: 9 punti, 4 intervalli



03/11/2004

Met. Comp. Fis.

57

Regola 1/3 di Simpson composta

- Come nella formula composta del trapezio suddividiamo l'integrale in $n/2$ sotto-integrali:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

- Sostituiamo la regola 1/3 di Simpson per ogni integrale e raccogliamo i termini comuni:

$$I = (b-a) \frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

$n+1$ punti, un numero dispari

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

58

Regola 1/3 di simpson composta

Riscriviamola come:

$$I \approx \frac{h}{3} f(x_0) + \frac{4h}{3} \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + \frac{2h}{3} \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) + \frac{h}{3} f(x_n)$$

N.B.: i coefficienti **dispari** ricevono un peso **4**, quelli **pari** un peso **2**.

Come per la regola del trapezio e' interessante scrivere l'integrale approssimato come una **somma pesata**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) w_i$$

dove $w_i = \left\{ \frac{h}{3}, \frac{4h}{3}, \frac{2h}{3}, \frac{4h}{3}, \frac{2h}{3}, \dots, \frac{4h}{3}, \frac{h}{3} \right\}$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

59

Stima dell'errore

L'errore puo' essere stimato dalla formula:

$$E_a = \frac{nh^5}{180} \bar{f}^{(4)} = \frac{(b-a)h^4}{180} \bar{f}^{(4)} \quad O(h^4)$$

$\bar{f}^{(4)}$ e' il valor medio della derivata quarta

Se si raddoppia n , $h \rightarrow h/2$ e $E_a \rightarrow E_a/16$

Nel caso del trapezio era: $n, h \rightarrow h/2$ e $E_a \rightarrow E_a/4$

Quindi la convergenza e' piu' veloce con la Simpson !!

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

60

$$I \approx \frac{h}{3} f(x_0) + \frac{4h}{3} \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + \frac{2h}{3} \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) + \frac{h}{3} f(x_n)$$

```

routine simpson(float func,float a,float b,int n)
float h,s_dispari,s_pari,,s
int j
h ← (b-a)/2*n
s_dispari ← 0
s_pari ← 0
for j=1 to n-1 by 1 do
  x ← a+h*2*j
  s_pari ← s_pari+func(x)
end for
for j=1 to n by 1 do
  x ← a+h*(2*j-1)
  s_dispari ← s_dispari+func(x)
end for
s=h*(func(a)+func(b)+2*s_pari+4*s_dispari)/3
return(s)

```

input

func; funzione da integrare
n: ordine integrazione
a,b: estremi integrazione

output

s: integrale approssimato

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

61

Esempio

Integrare $f(x) = e^{-x^2}$ da $a = 0$ a $b = 2$.
con la regola 1/3 di Simpson:

$$h = \frac{b-a}{2} = 1 \quad x_0 = a = 0 \quad x_1 = \frac{a+b}{2} = 1 \quad x_2 = b = 2$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3} h [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \\
 &= \frac{1}{3} [f(0) + 4f(1) + f(2)] \\
 &= \frac{1}{3} (e^0 + 4e^{-1} + e^{-4}) = 0.82994
 \end{aligned}$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

62

Esempio

Stima dell'errore: $E_t = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$

dove $h = b - a$ e $a < \xi < b$

Poiche' non conosco il valore di ξ si usa il valor medio:

$$E_t \approx E_a = -\frac{1^5}{90} \bar{f}^{(4)} = -\frac{1^5}{90} \frac{[f^{(4)}(x_0) + f^{(4)}(x_1) + f^{(4)}(x_2)]}{3}$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

63

Secondo esempio

Integriamo il polinomio:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

da $a = 0$ a $b = 0.8$

$$h = \frac{b-a}{2} = 0.4 \quad x_0 = a = 0 \quad x_1 = \frac{a+b}{2} = 0.4 \quad x_2 = b = 0.8$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 f(x) dx \approx \frac{1}{3} h [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \\ &= \frac{(0.4)}{3} [f(0) + 4f(0.4) + f(0.8)] \\ &= 1.36746667 \end{aligned}$$

Valore esatto: 1.64053334

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

64

Errore

L'errore vero (essendo noto il valore esatto) vale:

$$E = 1.64053334 - 1.36746667 = 0.27306666 \quad 16\%$$

Il valore stimato (se il valore esatto dell'integrale non e' disponibile) vale:

$$E_t = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

dove $a < \xi < b$.

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

65

Errore

Calcolando la derivata quarta

$$f^{(4)}(x) = -21600 + 48000x$$

$$E_t \approx E_a = -\frac{0.4^5}{90} f^{(4)}(x_1) = -\frac{0.4^5}{90} f^{(4)}(0.4) = 0.27306667$$

Punto medio dell'intervallo di integrazione

Accordo abbastanza buono con il vero errore !!

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

66

Esempio(cont)

Se si usano 4 segmenti invece di 2: $\Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = 0.2$

$$x = [0.0 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8]$$

$$\begin{array}{lll} f(0) = 0.2 & f(0.2) = 1.288 & f(0.4) = 2.456 \\ f(0.6) = 3.464 & f(0.8) = 0.232 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} I &= (b-a) \frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n} \\ &= (0.8-0) \frac{f(0) + 4f(0.2) + 2f(0.4) + 4f(0.6) + f(0.8)}{(3)(4)} \\ &= 0.8 \frac{0.2 + 4(1.288 + 3.464) + 2(2.456) + 0.232}{12} \\ &= 1.6234667 \end{aligned}$$

Valore esatto: 1.64053334

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

67

Errore

L'errore vero (se e' noto il valore esatto di I) vale:

$$E = 1.64053334 - 1.6234667 = 0.01706667 \quad 1\%$$

L'errore stimato (se non e' noto il valore esatto) vale:

$$E_t \approx E_a = -\frac{0.2^5}{90} f^{(4)}(x_2) = -\frac{0.2^5}{90} f^{(4)}(0.4) = -0.0085$$

Punto medio

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

68

Errore

Come' che l'errore reale e' due volte quello stimato?

Ricordiamo che:

$$f^{(4)}(x) = -21600 + 48000x$$

$$\max_{x \in [0, 0.8]} \{ |f^{(4)}(x)| \} = |f^{(4)}(0)| = 21600$$
$$|f^{(4)}(0.4)| = 2400$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

69

Errore

- Piu' che la stima possiamo considerare il valore assoluto dell'errore:

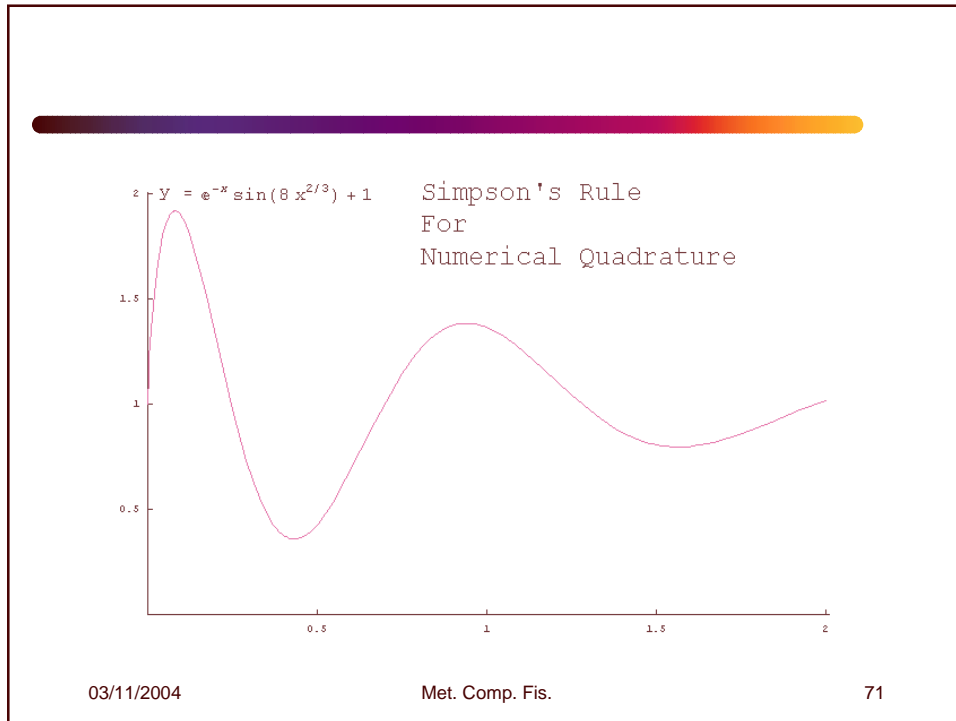
$$|E_a| = \left| -\frac{0.2^5}{90} f^{(4)}(\xi) \right| \leq \frac{0.2^5}{90} |f^{(4)}(0)| = 0.0768$$

- Cinque volte quello reale ma almeno si e' piu' sicuri.

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

70



Regola 1/3 di Simpson

- La regola 1/3 di Simpson usa un polinomio di ordine 2
 - Ha bisogno di 3 punti (2 intervalli)
 - Occorre un numero pari di intervalli.
- E se il numero di intervalli e' dispari ?
 Due scelte possibili:
 - O usare la Simpson 1/3 su tutti i segmenti eccetto l'ultimo (o il primo), ed usare la regola del trapezio sul segmento rimasto.
 - Si avra' un errore piu' grande sul segmento dove si usa la regola del trapezio.
 - O usare la **regola 3/8 di Simpson**

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

72

Regola 3/8 di Simpson

- La regola 3/8 di Simpson usa un **polinomio di ordine 3**
 - Necessita di 3 intervalli (4 punti)

$$f(x) \approx p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$I = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_3} p_3(x)dx$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

73

Regola 3/8 di Simpson

- I coefficienti a si determinano con la forma di Lagrange del polinomio
- Per punti equispaziati si avra':

$$I = \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

dove:
$$h = \frac{b-a}{3}$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

74

Errore

- E' dello stesso ordine della regola 1/3.
 - Piu' valutazioni della f.
 - La larghezza dell'intervallo, h , e' piu' piccola.

$$E_t = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi) \quad O(h^4)$$

- Integra esattamente una cubica:

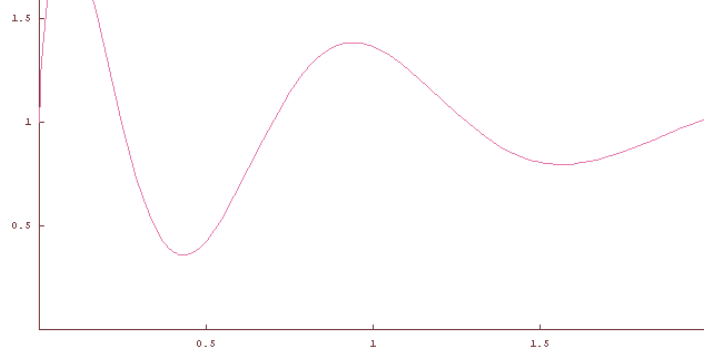
$$\Rightarrow \quad f^{(4)}(\xi) = 0$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

75

$y = e^{-x} \sin(8x^{2/3}) + 1$ Simpson's 3/8 Rule
For
Numerical Quadrature



03/11/2004

Met. Comp. Fis.

76

Confronti tra metodi

- Le regole 1/3 e 3/8 di Simpson hanno lo stesso ordine di errore $O(h^4)$
 - La regola del trapezio ha errore di ordine $O(h^2)$
- La regola 1/3 di Simpson richiede un **numero pari di segmenti**.
- La regola 3/8 di Simpson richiede **multipli di tre segmenti**.
- Entrambi i metodi richiedono punti **equispaziati**.

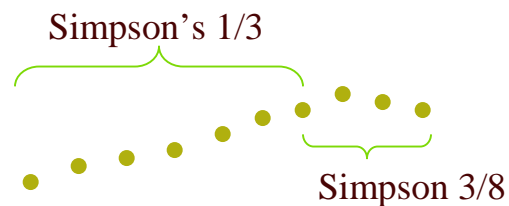
03/11/2004

Met. Comp. Fis.

77

Tecniche miste

- $n = 10$ punti \Rightarrow 9 intervalli
 - Primi 6 intervalli - Simpson 1/3
 - Ultimi 3 intervalli - Simpson 3/8



03/11/2004

Met. Comp. Fis.

78

Errore d'integrazione e di arrotondamento

Si e' visto che gli errori sugli algoritmi d'integrazione sono:

$$\begin{aligned} E_{trap} &\propto f''(\zeta) O\left(\frac{(b-a)^3}{n^2}\right), \\ E_{simps} &\propto f^{IV}(\zeta) O\left(\frac{(b-a)^5}{n^4}\right), \\ \mathcal{E}_{trap, simps} &= \frac{E_{trap, simps}}{f} \end{aligned}$$

Assumiamo che dopo n passi l'errore *relativo* di arrotondamento sia di tipo aleatorio e della forma

$$\mathcal{E}_{arro} \approx \sqrt{n} \mathcal{E}_m$$

dove \mathcal{E}_m e' la precisione della macchina

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

79

Errore d'integrazione e di arrotondamento

Vogliamo determinare il valore di n che minimizza l'errore totale

$$\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_{arro} + \mathcal{E}_{approx}$$

Supponiamo che cio' si verifichi quando i due errori sono uguali;

$$\mathcal{E}_{arro} = \mathcal{E}_{approx} = \frac{E_{trap, simp}}{f}$$

Supponiamo per semplicita' che

$$\frac{f^{(m)}}{f} \approx 1, \quad b - a = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{n}.$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

80

Errore d'integrazione e di arrotondamento

Per la regola del trapezio si ha quindi:

$$\sqrt{n} \varepsilon_m \approx \frac{f''(\xi)(b-a)^3}{f n^2} = \frac{1}{n^2},$$
$$\Rightarrow n \approx \frac{1}{(\varepsilon_m)^{2/5}}.$$

Quindi, a seconda della precisione usata si hanno, per la regola del trapezio, i seguenti valori:

$$n = \frac{1}{h} = \begin{cases} (1/10^{-9})^{2/5} = 3981, & \text{per singola precisione,} \\ (1/10^{-15})^{2/5} = 10^6, & \text{per doppia precisione} \end{cases}$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

81

Errore d'integrazione e di arrotondamento

Per la regola 1/3 di Simpson si ha invece:

$$\sqrt{n} \varepsilon_m \approx \frac{f^{iv}(\xi)(b-a)^5}{f n^4} = \frac{1}{n^4},$$
$$\Rightarrow n \approx \frac{1}{(\varepsilon_m)^{2/9}}.$$

Quindi, a seconda della precisione usata si hanno, per la regola 1/3 di Simpson, i seguenti valori:

$$n = \frac{1}{h} = \begin{cases} (1/10^{-9})^{2/9} = 100, & \text{per singola precisione,} \\ (1/10^{-15})^{2/9} = 2154, & \text{per doppia precisione} \end{cases}$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

82

Quadratura Gaussiana

- L'idea è di valutare la funzione in **certi punti**, e di sommare con dei pesi appropriati, in modo da ottenere un integrale più accurato.
- I punti valutati ed i pesi sono pre-calcolati e immagazzinati in una tabella
- La formula base vale:

dove:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

c_i : fattori peso

x_i : Punti campionati scelti in maniera ottimale



03/11/2004

Met. Comp. Fis.

83

Quadratura Gaussiana

- Nota che si integra tra -1 e 1
- Per intervalli generici, si usa un cambio di variabile per ricondursi all'intervallo $[-1, 1]$
- È una semplice trasformazione lineare tale che, per $t \in [a, b]$ e:

$$\int_a^b f(t) dt$$

si avrà per $x \in [-1, 1]$:

$$t = \frac{(b-a)x + b + a}{2}$$



$$x = \frac{2t - b - a}{b - a}$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

84

Quadratura gaussiana

- In $t = a \Rightarrow x = -1$
 - In $t = b \Rightarrow x = 1$
- $$dt = \frac{(b-a)}{2} dx$$

$$f(t) = f\left(\frac{(b-a)x + b + a}{2}\right)$$

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)x + b + a}{2}\right) dx$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

85

Quadratura Gaussiana

- La formula base e':

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

- Per $n=2$, si ha:

$$I \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

- Si hanno quindi 4 incognite: c_1 , c_2 , x_1 , e x_2
 - Due pesi incogniti (c_1 , c_2)
 - Due punti di campionamento incogniti (x_1 , x_2)

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

86

Quadratura Gaussiana

- Consideriamo in particolare gli integrali di questi semplici polinomi:
 - Costante
 - $f(x)=1$
 - Lineare
 - $f(x)=x$
 - Quadratica
 - $f(x)=x^2$
 - Cubica
 - $f(x)=x^3$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

87

Quadratura Gaussiana

- Ricordando la formula: $I \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$
 - Costante
 - $f(x)=1$
 - $\int_{-1}^1 1 dx = 2 = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = c_1 + c_2$
 - Lineare
 - $f(x)=x$
 - $\int_{-1}^1 x dx = 0 = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$
 - Quadratica
 - $f(x)=x^2$
 - $\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2$
 - Cubica
 - $f(x)=x^3$
 - $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

88

Quadratura Gaussiana

Se ora risolviamo le 4 equazioni per le 4 incognite otteniamo:

$$\begin{aligned}c_1 &= c_2 = 1 \\x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.577 \\x_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577\end{aligned}$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

89

Quadratura Gaussiana

- Questo conduce alla formula di **Gauss-Legendre** a due punti

$$I \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

90

Quadratura Gaussiana

- Essa e' **esatta** per **tutti** i polinomi sino a quelli di grado 3 inclusi.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx &= a \int_{-1}^1 x^3 dx + b \int_{-1}^1 x^2 dx + c \int_{-1}^1 x dx + d \int_{-1}^1 dx \\ &= a \left(\left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 \right) + b \left(\left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) + c \left(\left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) + d(1+1) \\ &= \left(ax^3 + bx^2 + cx + d \right) \Big|_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

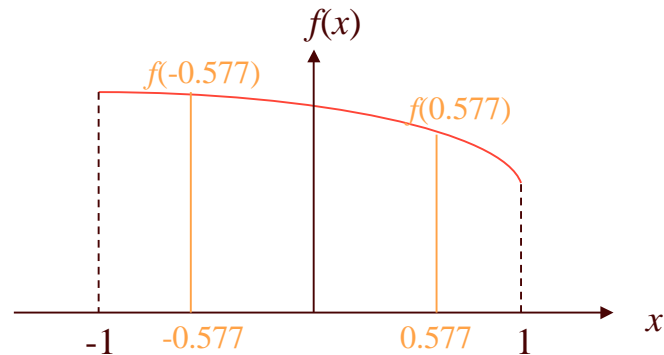
03/11/2004

Met. Comp. Fis.

91

Quadratura Gaussiana

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f(-0.577) + f(0.577)$$



03/11/2004

Met. Comp. Fis.

92

Esempio

- Integrare $f(x)$ da $a = 0$ a $b = 0.8$

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

- Occorre prima passare da $[0, 0.8]$ a $[-1, 1]$

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)x + b+a}{2}\right) dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^{0.8} f(x) dx = \frac{(0.8-0)}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(0.8-0)t + 0.8+0}{2}\right) dt \\ &= 0.4 \int_{-1}^1 f(0.4t + 0.4) dt \end{aligned}$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

93

Esempio (cont.)

- Inserendo la forma esplicita della f si ha:

$$\begin{aligned} I &= 0.4 \int_{-1}^1 f(0.4t + 0.4) dt \\ &= 0.4 \int_{-1}^1 \left[0.2 + 25(0.4t - 0.4) - 200(0.4t - 0.4)^2 \right. \\ &\quad \left. + 675(0.4t - 0.4)^3 - 900(0.4t - 0.4)^4 + 400(0.4t - 0.4)^5 \right] dt \end{aligned}$$

e sostituendo la formula a 2-punti:

$$I = 0.4 \int_{-1}^1 f(t) dt \quad t = \pm 1/\sqrt{3}$$

$$I \approx 0.51674055 + 1.30583723 = 1.82257778$$

Valore esatto: **1.64053334**

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

94

Quadratura Gaussiana di ordine superiore

- Ricordiamo ancora la formula di base:

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

- E consideriamo il caso $n=3$.

$$I \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

- Ora si hanno 6 incognite: $c_1, c_2, c_3, x_1, x_2, e x_3$
 - 3 pesi incogniti (c_1, c_2, c_3)
 - 3 punti incogniti di campionamento (x_1, x_2, x_3)

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

95

Usiamo 6 equazioni - costante, lineare, quadratica, cubica, 4th grado e 5th grado per trovare i valori incogniti:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 1 dx = 2 &= c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) = c_1 + c_2 + c_3 \\ \int_{-1}^1 x dx = 0 &= c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} &= c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 \\ \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 &= c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 + c_3 x_3^3 \\ \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5} &= c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) = c_1 x_1^4 + c_2 x_2^4 + c_3 x_3^4 \\ \int_{-1}^1 x^5 dx = 0 &= c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) = c_1 x_1^5 + c_2 x_2^5 + c_3 x_3^5\end{aligned}$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

96

Quadratura Gaussiana di ordine 3

- Risolvendo le 6 equazioni si ottiene:

$$\begin{array}{ccc} c_1 = 5/9 & c_2 = 8/9 & c_3 = 5/9 \\ x_1 = -\sqrt{3/5} = -0.77459669 & x_2 = 0 & x_3 = \sqrt{3/5} = 0.77459669 \end{array}$$

- Che produce la formula a 3 punti di Gauss-Legendre

$$I \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

- Formula esatta per polinomi sino al grado 5

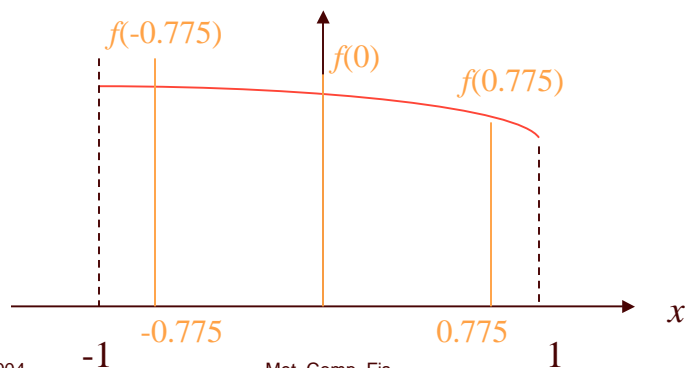
03/11/2004

Met. Comp. Fis.

97

Quadratura Gaussiana di ordine 3

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f(-0.775) + \frac{8}{9} f(0.0) + \frac{5}{9} f(0.775)$$



03/11/2004

Met. Comp. Fis.

98

Esempio

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

Integrare da $a = 0$ a $b = 0.8$

Passiamo prima da $[0, 0.8]$ a $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{0.8} f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[0.2 + 25(0.4t - 0.4) - 200(0.4t - 0.4)^2 \right. \\ &\quad \left. + 675(0.4t - 0.4)^3 - 900(0.4t - 0.4)^4 + 400(0.4t - 0.4)^5 \right] dt \end{aligned}$$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

99

Esempio (cont)

- Usando la formula a 3 punti di Gauss-Legendre:

$$I \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

nell'equazione trasformata, si ottiene:

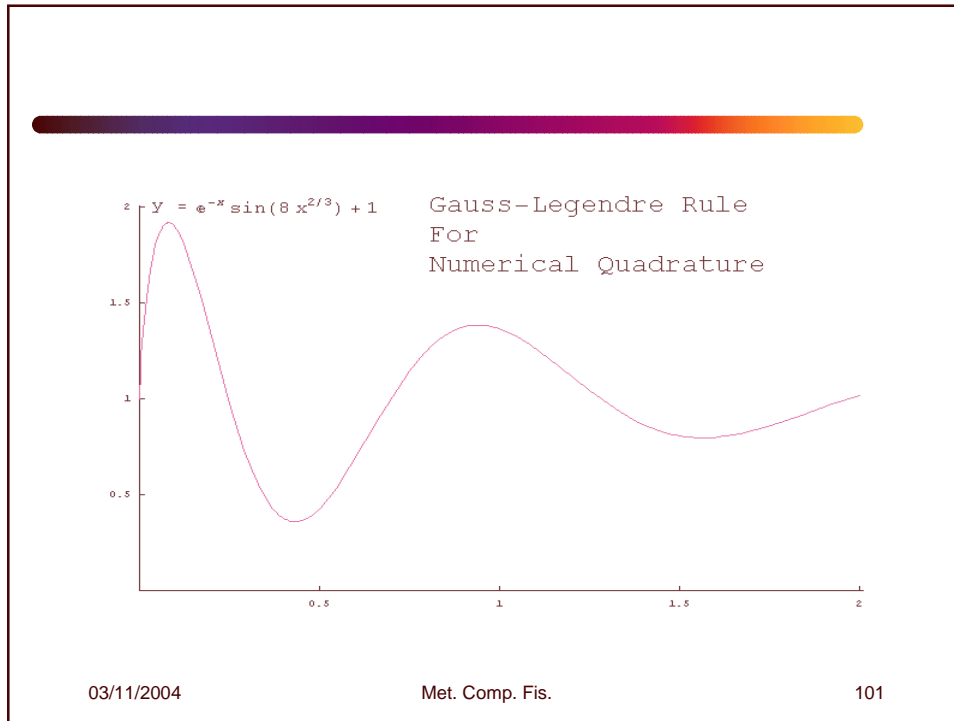
$$\begin{aligned} I &\approx 0.281301290 + 0.873244444 + 0.485987599 \\ &= 1.64053334 \end{aligned}$$

Il valore esatto e' 1.64053334

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

100



Quadratura gaussiana di ordine superiore

In generale, per il calcolo dell'integrale:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

Si possono sviluppare formule di Gauss-Legendre di ordine superiori (ad **n punti**):

$$I \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n)$$

E tali formule saranno esatte per polinomi sino all'ordine **2n-1**.

Quadratura gaussiana di ordine superiore

Nel caso generale si puo' mostrare che gli n punti x_i da usare corrispondono alle radici del Polinomio di Legendre di ordine n:

$x_i \rightarrow$ radici di $P_n(x)$

$$c_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P_n'(x_i)]^2}$$

n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$(1/2)(3x^2-1)$
3	$(1/2)(5x^3-3x)$
4	$(1/8)(35x^4-30x^2+3)$
5	$(1/8)(63x^5-70x^3+15x)$
6	$(1/16)(231x^6-315x^4+105x^2-5)$

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

103

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n)$$

n	2	3	4	5	6
c_i	1.0	0.5555555556	0.3478548451	0.2369268850	0.1713245
	1.0	0.8888888889	0.6521451549	0.4786286705	0.3607616
		0.5555555556	0.6521451549	0.5688888889	0.4679139
			0.3478548451	0.4786286705	0.4679139
				0.2369268850	0.3607616
					0.1713245
	-0.5773502692	-0.7745966692	-0.8611363116	-0.9061798459	-0.932469514
x_i	0.5773502692	0.0000000000	-0.3399810436	-0.5384693101	-0.661209386
		0.7745966692	0.3399810436	0.0000000000	-0.238619186
			0.8611363116	0.5384693101	0.238619186
				0.9061798459	0.661209386
					0.932469514

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

104

Casi generali di quadratura gaussiana

Il problema d'integrazione nel caso di quadratura Gaussiana si puo' esprimere in una maniera piu' generale introducendo una funzione peso W nell'integrando e permettendo un intervallo d'integrazione diverso da $[-1,1]$:

$$\int_a^b W(x) f(x) dx$$

Per $a=-1, b=1$ e $W(x)=1$ siamo nel caso trattato prima (Gauss-Legendre)

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

105

Casi generali di quadratura gaussiana

Intervallo	W(x)	Polinomi $P_N(x)$	Nome Algoritmo
$[-1,1]$	1	Legendre	Gauss-Legendre
$[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Chebyshev	Gauss-Chebyshev
$[0, \infty)$	e^{-x}	Laguerre	Gauss-Laguerre
$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	Hermite	Gauss-Hermite

03/11/2004

Met. Comp. Fis.

106

Quadratura Gaussiana



- Richiede la valutazione della funzione in punti **non-equispaziati**
 - Non e' appropriato per casi dove non e' nota la funzione
 - Non appropriato per trattare problemi con dati tabulati provenienti per esempio da esperimenti.
 - Molto efficiente se la funzione integranda e' nota