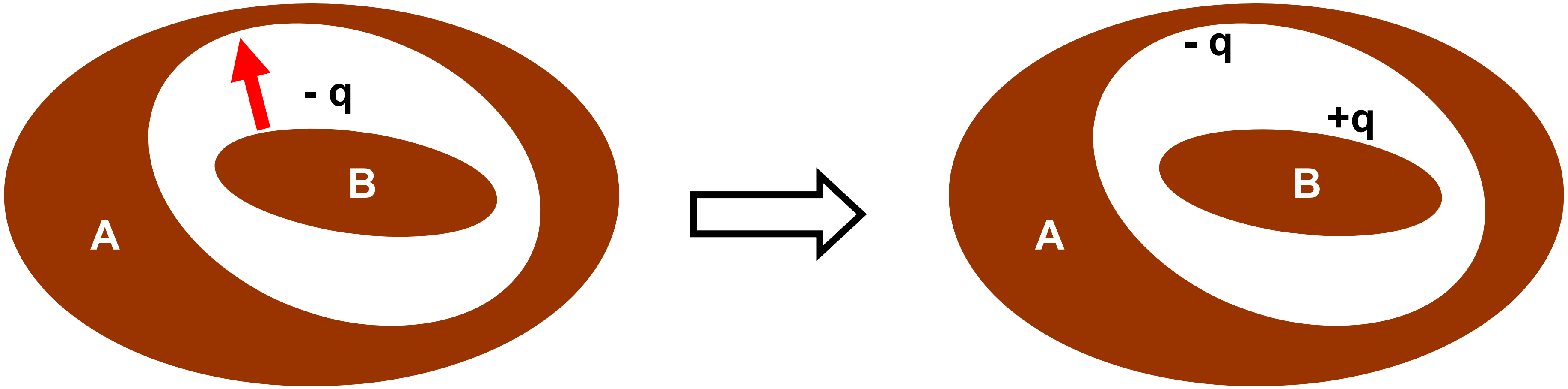
Condensatori

Un condensatore è un sistema di due conduttori affacciati
tra i quali esiste induzione completa.
Le due superfici affacciate si chiamano armature
Consideriamo il sistema costituito da due conduttori A cavo e B contenuto nella cavità;
depositiamo sul conduttore esterno la carica **-q** tolta a quello interno:



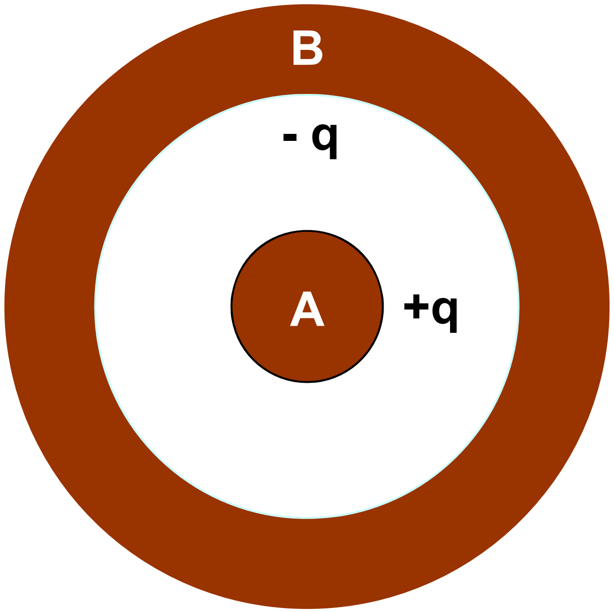
La capacità, è definita come il rapporto tra la carica presente sulle "armature"
e la d.d.p. tra di esse.

$$C = \frac{q}{\Delta \mathbf{V}_{\mathbf{AB}}}$$

Nota: un conduttore isolato può essere considerato come un condensatore con l'altra armatura all'infinito.

Se i due conduttori sono sferici e concentrici, come in figura, abbiamo a che fare con un

condensatore sferico



$$\Delta V_{AB} = k_e\, q \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)$$

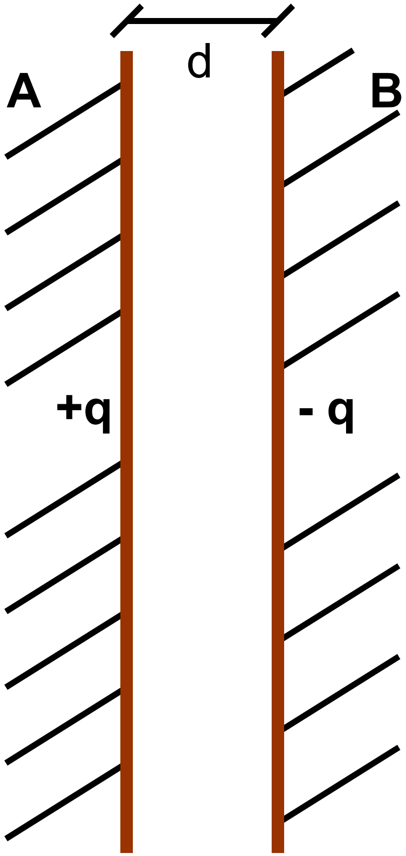
$$C = \frac{q}{\Delta V_{AB}} = \frac{\cancel{q}}{\dfrac{\cancel{q}}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{R_B - R_A}{R_A R_B}}$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_B - R_A}$$

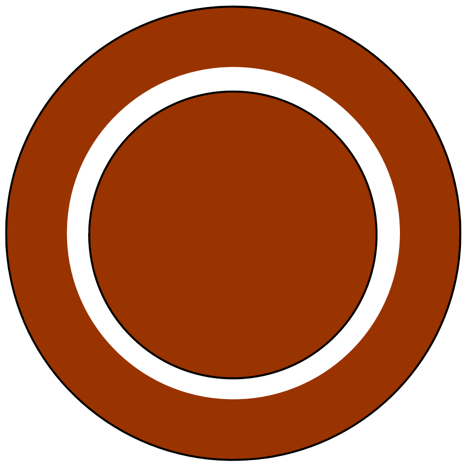
C dipende solo da parametri geometrici

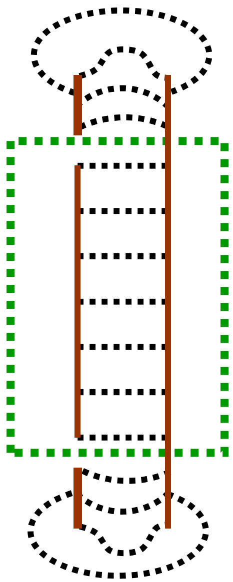
Condensatore piano

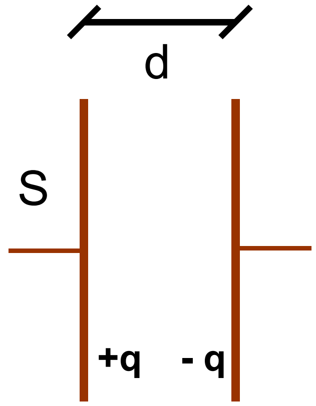
Le armature sono costituite da conduttori piani, paralleli (ed infiniti).



Le linee del CE devono essere perpendicolari alle armature in ogni punto, anche sui bordi.
Ciò si verifica solo con piani infiniti o con alcuni stratagemmi quali gli anelli di guardia……

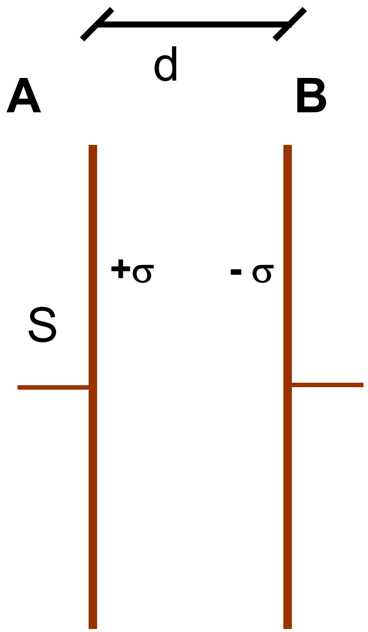






Condensatore piano

Il CE tra le armature è costante. Ha il valore dato dal teorema di Coulomb



$$\Delta V_{AB} = E\,d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,d = \frac{q}{S\,\varepsilon_0}\,d$$

$$= \frac{q}{S\,\varepsilon_0}\,d$$

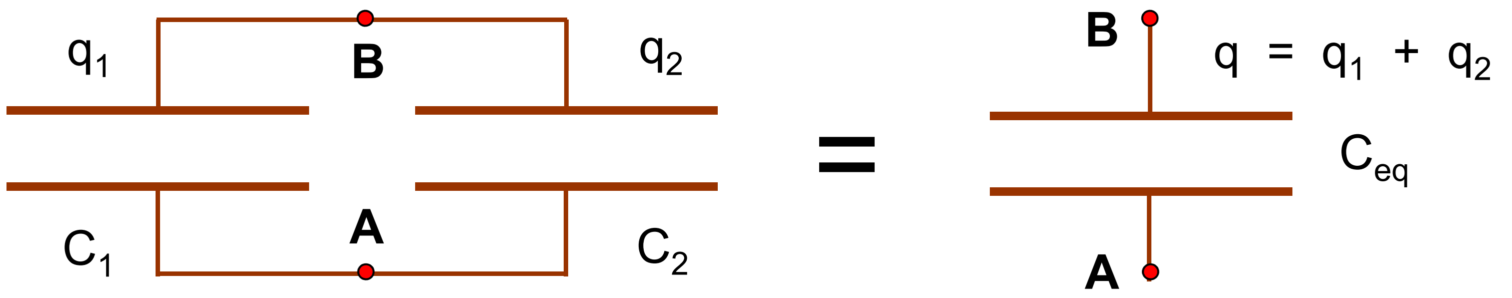
$$C = \frac{q}{\Delta V_{AB}} = \frac{\cancel{q}}{\dfrac{\cancel{q}}{S\,\varepsilon_0}\,d}$$

$$\boxed{C = \frac{S\,\varepsilon_0}{d}}$$

Condensatori di uso pratico

Condensatori in parallelo

Consideriamo ora due condensatori collegati come in figura (in parallelo):
Calcoliamo la Capacità equivalente di un condensatore che abbia la stessa d.d.p. tra le armature (punti A e B) e come carica la somma delle cariche presenti sulle armature.



$$V_1 = V_2 \qquad\qquad V_1 = V_2 = V$$

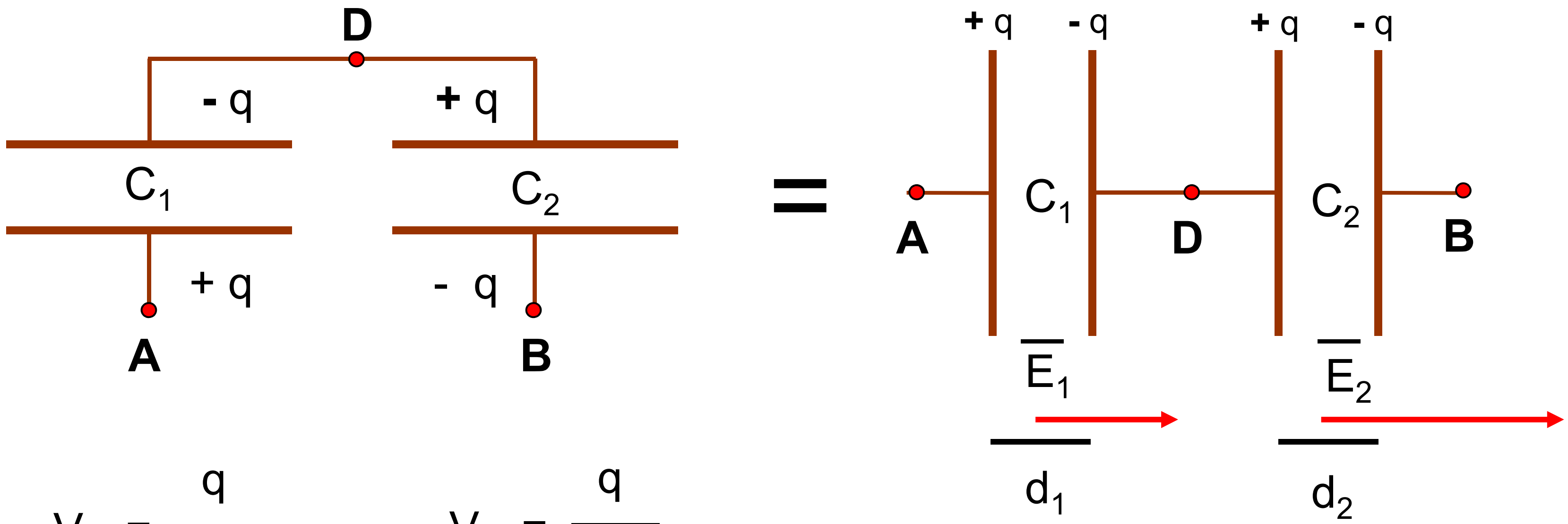
$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = \frac{q_1 + q_2}{V} = \frac{q_1}{V} + \frac{q_2}{V} = C_1 + C_2$$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$$

Condensatori in serie

Consideriamo ora due condensatori collegati come in figura (in serie):
Depositiamo una carica + q sull'armatura **A;** per induzione compariranno cariche - q e + q sul conduttore **D** e - q sull'armatura **B**



$$V_1 = \frac{q}{C_1} \qquad V_2 = \frac{q}{C_2}$$

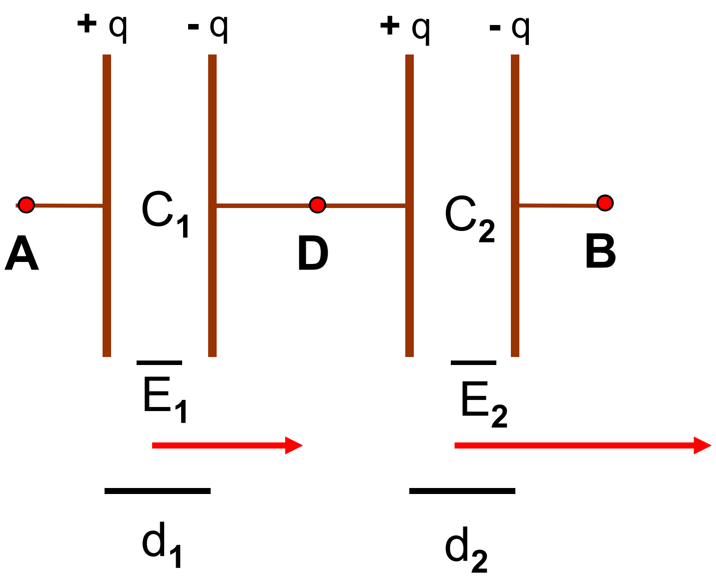
$$\mathbf{V_{AB}} = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

$$= V_1 + V_2$$

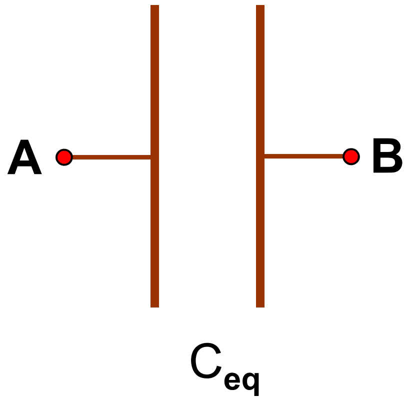
$$\mathbf{V_{AB}} = V_1 + V_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

Condensatori in serie

Calcoliamo la Capacità equivalente di un condensatore che abbia la stessa d.d.p. tra i punti A e B e come carica la carica presente sulle armature.



=



$$q = q_1 = q_2$$

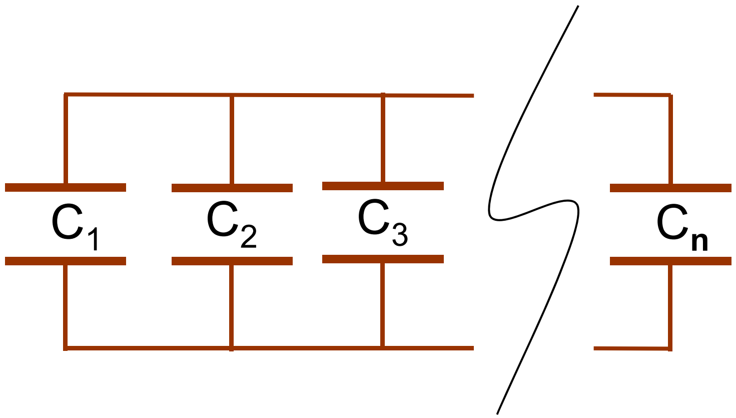
$$V_{AB} = V_1 + V_2$$

$$V_{AB} = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

$$V_{AB} = q \frac{1}{C_{eq}}$$

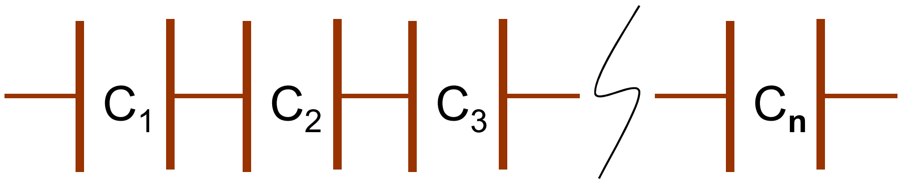
$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Condensatori in serie e in parallelo
In generale



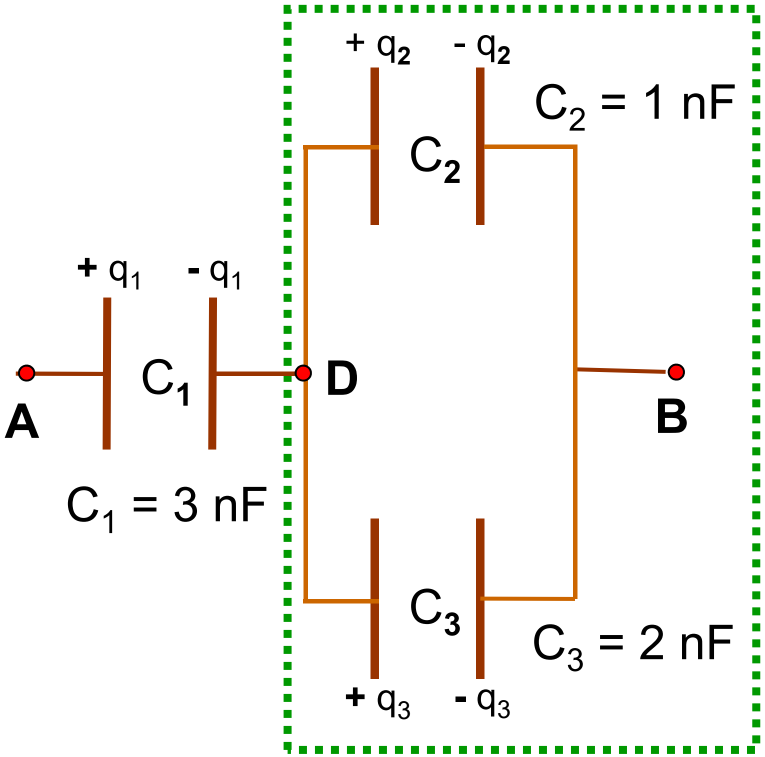
$$\boxed{C_{eq} = \Sigma\, C_k}$$

La C_{eq} ha un valore maggiore rispetto a quello dei singoli componenti

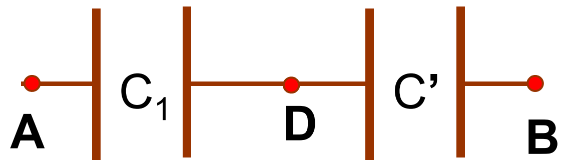


$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \Sigma\, \frac{1}{C_k}}$$

La C_{eq} ha un valore minore rispetto a quello dei singoli componenti

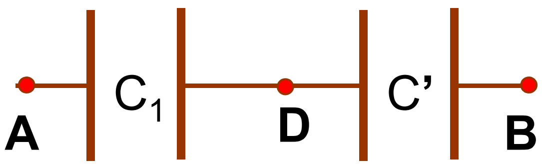


=

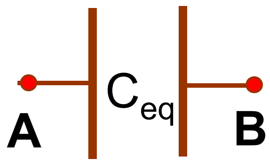


$$C' = C_2 + C_3$$

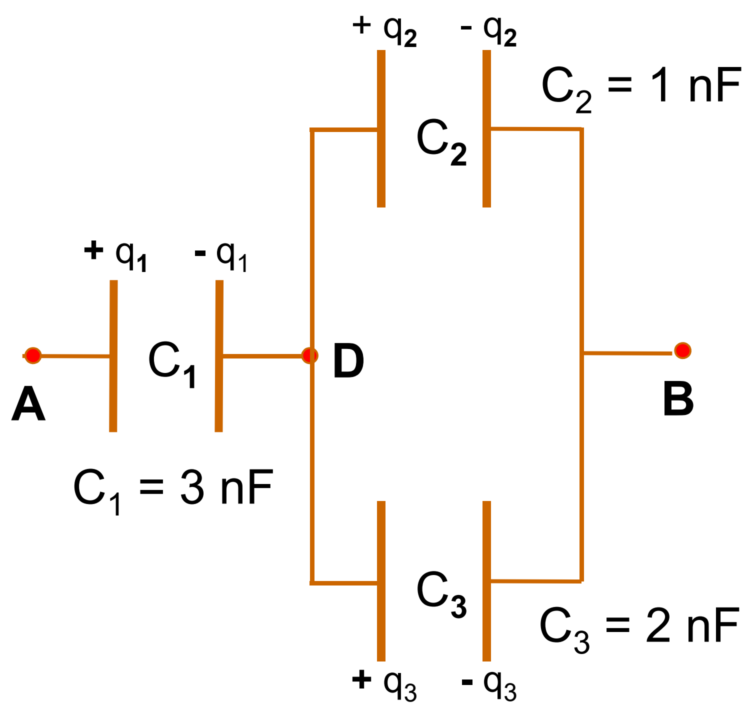
$$C' = 3 \text{ nF}$$



=

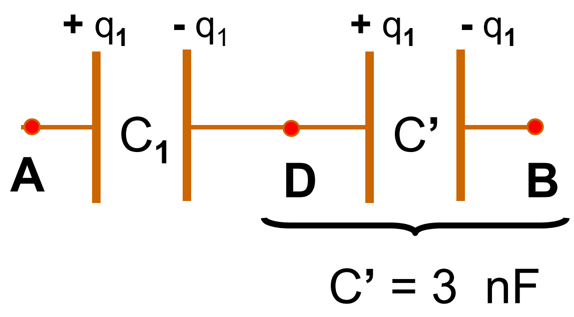


$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = 1.5 \text{ nF}$$

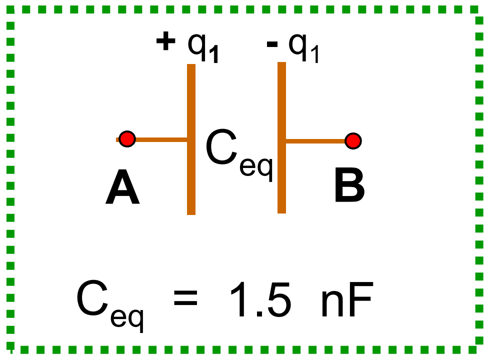


Supponiamo che tra i punti **A** e **B** venga applicata una d.d.p. di 150 V.
Calcoliamo la carica presente sulle armature

➔



➔



$q_A = q_1 = V\,C_{eq} = 150 \times 1.5\ 10^{-9} = \mathbf{225\ nC}$

$q_1 = q_2 + q_3$

$$V_{AD} = \frac{q_1}{C_1} = \frac{225\ 10^{-9}}{3\ 10^{-9}} = 75\ \text{V}$$

$V_{DB} = V_{AB} - 75 = 75\ \text{V} = V_2 = V_3$

$q_2 = V_2\,C_2 = 75 \times 1\ 10^{-9} = \mathbf{75\ nC}$

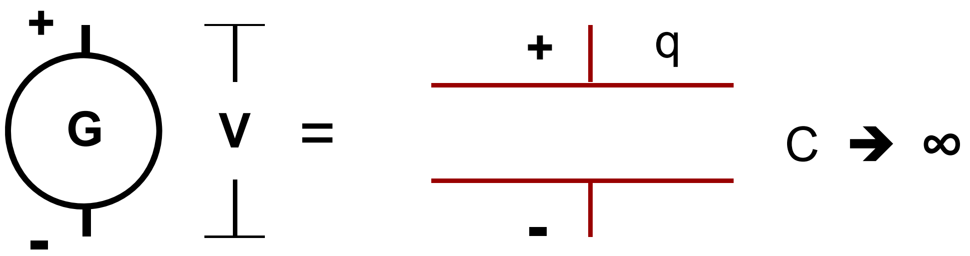
$q_3 = V_3\,C_3 = 75 \times 2\ 10^{-9} = \mathbf{150\ nC}$

Generatori elettrostatici

Dispositivi in grado di fornire carica mantenendo costante la d.d.p. tra i terminali di uscita; possono essere schematizzati come
Condensatori con Capacità infinita:

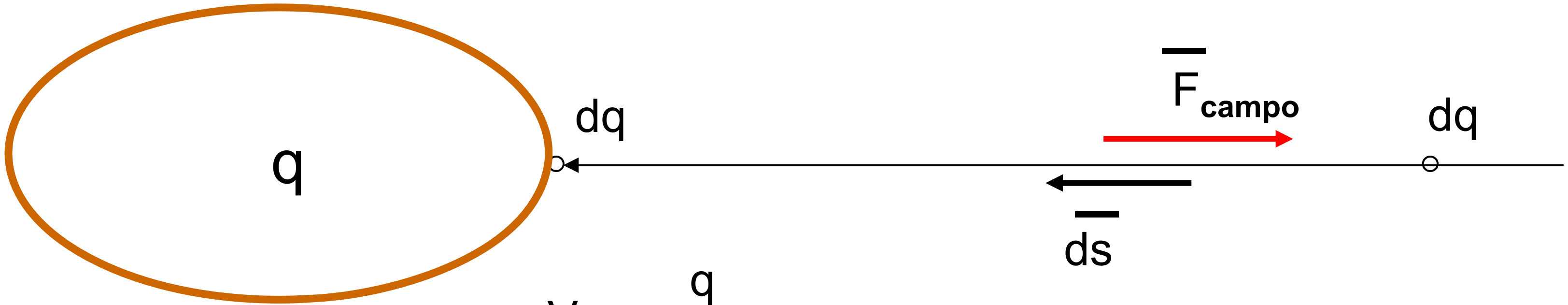
da $$C = \frac{q}{V} \qquad dV = \frac{dq}{C}$$

Se $C \rightarrow \infty \qquad dV \rightarrow 0$ per qualsiasi valore di dq



Energia interna di un conduttore

Calcoliamo ora l'energia interna di un conduttore di capacità C e carica Q.
Supponiamo che il conduttore abbia già una carica q, e che si trovi ad un potenziale V.



$$V = \frac{q}{C}$$

Per portare una carica elementare dq dall'infinito sul conduttore, le forze del campo eseguono un lavoro elementare

$$dL = -dq\ V$$

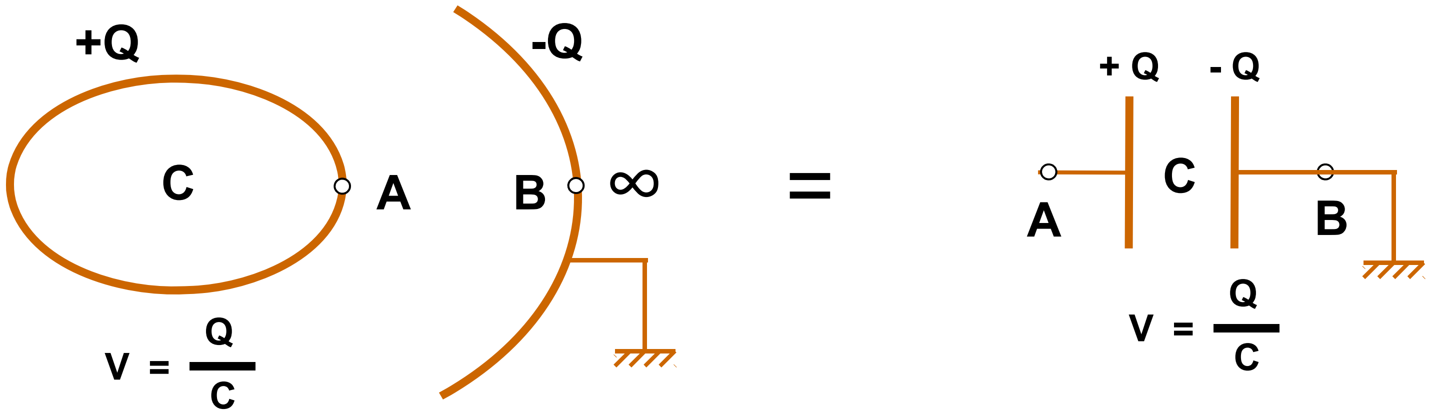
$$dL = -dq\ V$$

Per **caricare da 0 a Q il conduttore**, il lavoro richiesto sarà:

$$L = -\int_0^Q V\,dq = -\int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad Q = C\,V$$

$$\boxed{U_{int} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}V^2 C}$$

Abbiamo già detto che un conduttore è un condensatore con una armatura all'infinito.
Per un condensatore che abbia capacità C, carica Q e d.d.p. tra le armature V, l'energia interna ha la stessa espressione analitica



Processi a carica e potenziale costanti

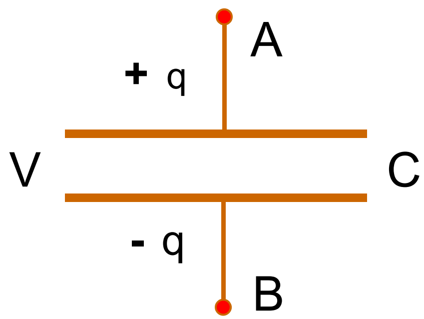
Un condensatore piano carico può variare le condizioni di lavoro subendo alcune trasformazioni; può essere variata la geometria del sistema, ad esempio per avvicinamento o allontanamento delle armature, o per inserimento di un qualche materiale dielettrico o conduttore tra le armature stesse.

Queste trasformazioni comportano una variazione dei parametri caratteristici del condensatore, innanzitutto della sua capacità, che dipende dalla geometria del sistema.

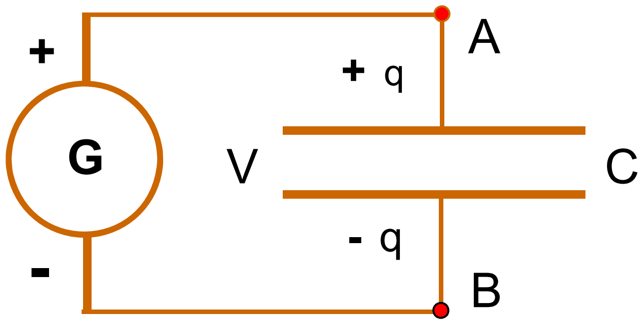
Le trasformazioni possono avvenire mantenendo costanti

- la carica **q** (sistema isolato)
- il potenziale **V** (sistema collegato ad un generatore di d.d.p. costante)

$$C = \frac{q}{V}$$



q = cost



V = cost

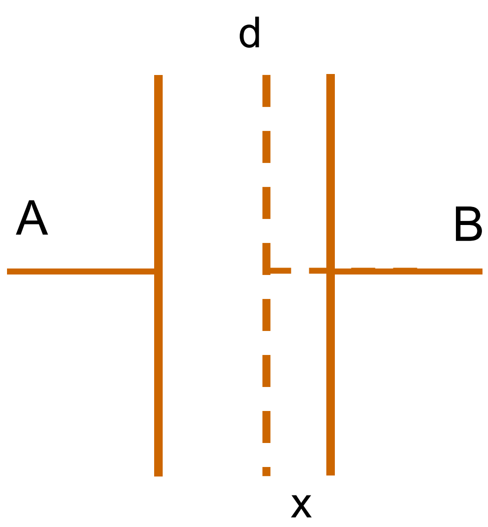
Processi a q = cost

Nel processo a **q** = **cost** il condensatore è isolato;
la carica sulle armature rimane sempre costante;
di conseguenza rimane costante anche la densità di carica superficiale σ **ed il CE**.

$$\sigma_0 = \frac{q_0}{S} = \text{cost} \qquad E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \text{cost}$$

Supponiamo ora di avvicinare le armature di una quantità **x**

La capacità varia in quanto dipende dalle caratteristiche geometriche del sistema:



$$C_i = \frac{S\,\varepsilon_0}{d} \qquad C_f = \frac{S\,\varepsilon_0}{d - x} \qquad \boxed{C_f > C_i}$$

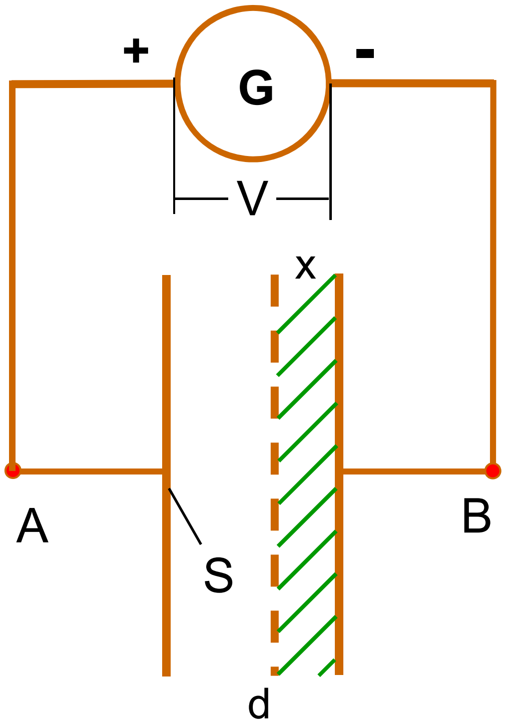
$$V_i = E\,d \qquad V_f = E\,(d - x) \qquad \boxed{V_f < V_i}$$

$$C_i = \boxed{\frac{q}{V_i}} \qquad C_f = \boxed{\frac{q}{V_f}}$$

Processi a V = cost

Nel processo a **V** = **cost** il condensatore non è isolato in quanto il generatore, che mantiene la d.d.p. costante, può scambiare carica con il condensatore stesso: la carica sulle armature perciò non rimane costante e di conseguenza il CE.

Come nel caso precedente, avviciniamo le armature.
La capacità varia come nel caso precedente (dipende solo da caratteristiche geometriche)



$$C_i = \frac{S\,\varepsilon_0}{d} \qquad C_f = \frac{S\,\varepsilon_0}{d - x} \qquad \boxed{C_f > C_i}$$

$$C_i = \frac{q_i}{V} \qquad C_f = \frac{q_f}{V} \qquad \boxed{q_f > q_i}$$

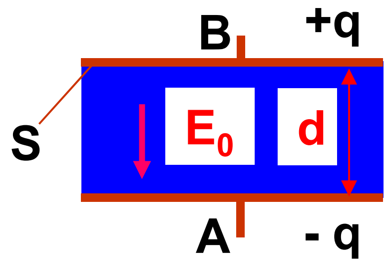
$$\sigma_f > \sigma_i \qquad E_f > E_i$$

$$V = E_i\, d \qquad V = E_f\,(d - x)$$

$$E_f = E_i \frac{d}{d - x}$$

I dielettrici

Consideriamo un condensatore piano, isolato, con distanza **d** tra le armature, superficie **S,** carica **q**



$$V_0 = E_0 d \qquad C_0 = \frac{S\,\varepsilon_0}{d}$$

Si osserva che, inserendo tra le armature un materiale isolante (dielettrico) la d.d.p. **diminuisce** di un fattore ε_r che dipende dal materiale e dalla Temperatura.

$$V < V_0 \qquad V = \frac{V_0}{\varepsilon_r}$$

Durante il processo di inserimento, la carica sulle armature si mantiene costante. E' **processo a carica costante**

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{V_0}{\varepsilon_r}} = \varepsilon_r \frac{q}{V_0}$$

Dalle misure si vede che la d.d.p. diminuisce e quindi anche C aumenta, dal momento che q = cost,

$$C = \varepsilon_r \, C_0$$

La Capacità dipende da fattori geometrici, e dalla presenza, tra le armature, di materiali dielettrici; il suo valore aumenta con la costante ε_r

Per il condensatore piano risulta :

$$C = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon S}{d} \qquad \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

ε_r costante dielettrica relativa. E' sempre > 1

ε costante dielettrica assoluta.

Se la d.d.p. è diminuita, significa che il valore del CE tra le armature è pure diminuito:

$$\begin{cases} V_0 = E_0 d \\ V = E d \end{cases} \Rightarrow \frac{V_0}{V} = \frac{E_0}{E} = \varepsilon_r$$

Per il CE tra le armature e sulla superficie del conduttore potremo scrivere:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon}$$