

Introduzione alla QED: Scritto del 29/08/2013

Si consideri la seguente Lagrangiana di interazione tra due fermioni f_1 ed f_2 di massa m_1 ed m_2 , associati rispettivamente agli spinori di Dirac ψ_1 e ψ_2 :

$$\mathcal{L}_F = G_F (\bar{\psi}_1 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_1) (\bar{\psi}_2 \gamma_\mu (a - b\gamma_5) \psi_2) ,$$

con G_F una costante reale e a, b due costanti in generali complesse.

1. Si determini la dimensione della costante di accoppiamento G_F in unità di massa;
2. Si dica quali condizioni si devono imporre su a e b perché la Lagrangiana sia hermitiana;
3. Si calcoli l'ampiezza di Feynman \mathcal{M} , al primo ordine perturbativo in G_F , per il processo $f_1 + f_2 \rightarrow f_1 + f_2$. Suggerimento: si parta dall'operatore matrice-S associato alla teoria descritta dalla Lagrangiana \mathcal{L}_F , i.e. $S = T [\exp \{i \int d^4x \mathcal{L}_F(x)\}]$, e si calcoli esplicitamente $\langle f_1(q_1) f_2(q_2) | S^{(1)} | f_1(p_1) f_2(p_2) \rangle$, dove con $p_{1,2}$ e $q_{1,2}$ si intendono rispettivamente i momenti iniziali e finali dei fermioni $f_{1,2}$;

Da questo momento in avanti per semplicità si consideri il caso $m_2 \gg m_1 \approx 0$ e si prendano $a = b = 1$.

4. Si calcoli il modulo quadrato dell'ampiezza di Feynman mediato sugli spin iniziali e finali $|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \sum_{s_i s_f} |\mathcal{M}|^2$. Si esprima il risultato in termini delle variabili di Mandelstam s, t, u .
5. Si calcoli la sezione d'urto differenziale non polarizzata $d\sigma/d\cos\theta$ per il processo $f_1 + f_2 \rightarrow f_1 + f_2$ nel sistema del centro di massa. Con θ si intenda l'angolo tra \vec{p}_1 e \vec{q}_1 ;
6. Si derivi la sezione d'urto differenziale per il processo $f_2 + \bar{f}_2 \rightarrow f_1 + \bar{f}_1$;
7. Si calcoli l'ampiezza di Feynman polarizzata \mathcal{M}_{LR} relativa al processo $(f_2)_L + (\bar{f}_2)_L \rightarrow (f_1)_R + (\bar{f}_1)_R$ (con R, L si intendono le polarizzazioni di elicità $\pm 1/2$).

NB: I risultati discussi a lezione (o presenti sui libri di testo) vanno debitamente discussi e motivati

Risultati

2. $a, b \in \Re$;
3. $\mathcal{M} = 4 i G_F \bar{u}_1(q_1) \gamma^\mu P_L u_1(p_1) \bar{u}_2(q_2) \gamma_\mu P_L u_2(p_2)$
4. $|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_i s_f} |\mathcal{M}|^2 = 16 G_F^2 (s - m_2^2)^2$;
5. $\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{G_F^2}{2\pi} \frac{(s - m_2^2)^2}{s}$;
6. $s \rightarrow u$
7. $|\overline{\mathcal{M}_{LR}}|^2 = 0$ per la conservazione della chiralità-helicità;