Le logiche della fisica

Perché gli stati quantistici sono rappresentati da vettori complessi?

Renato Nobili
Dipartimento di Fisica "G.Galilei" - Università di Padova

Introduzione

La scoperta della meccanica quantistica, avvenuta tra il 1924 e il 1926, cambiò radicalmente il modo di rappresentare i sistemi fisici e i loro stati causando una vera e propria rivoluzione del pensiero scientifico e filosofico. Il cambiamento più sconcertante riguardava il fatto che il modo di ragionare della fisica classica diventava contraddittorio tutte le volte che si tentava di spiegare i fenomeni quantistici. John von Neumann e Garrett Birkhoff nel 1936, e più tardi in modo più preciso Constantin Piron (1964), dimostrarono che per evitare le contraddizioni bisognava assoggettare il linguaggio della fisica ad una logica di tipo nuovo, che fu chiamata *logica quantistica*.

È opportuno precisare che col termine "logica quantistica" non bisogna intendere la logica della matematica che si usa nella meccanica quantistica, che è la stessa per tutta la matematica, ma la struttura formale del linguaggio che bisogna usare per descrivere con successo gli esperimenti della fisica dei quanti.

Il linguaggio matematico e quello fisico differiscono in modo sostanziale specialmente riguardo le proprietà delle cose con cui si ha a che fare. Il primo parla di entità astratte, dei simboli che le rappresentano e di operazioni formali rigorosamente deterministiche. Il secondo parla di oggetti materiali concreti, di processi dall'esito talvolta imprevedibile e di eventi spesso casuali che non hanno l'analogo nella matematica. Non sembrerà perciò strano che le strutture formali di questi linguaggi siano diverse.

In questo articolo illustrerò brevemente quali sono le basi logiche del linguaggio fisico e dimostrerò come la logica quantistica sia per la fisica la sola alternativa alla logica classica. Dimostrerò in particolare che i vettori complessi, che si usano nella meccanica quantistica per descrivere gli stati dei sistemi fisici, vale a dire i vettori dello *spazio hilbertiano*, sono l'unica alternativa logicamente ammissibile alla rappresentazione degli stati dei sistemi fisici classici.

1. La logica della fisica nel mondo antico

La nascita del pensiero logico può farsi risalire alla celebre istanza centrale del *Poema della Natura* di Parmenide di Elea (515-450 a.C.): "… *tu dirai di ciò che è che è, e di ciò che non è che non è*". Da intendersi: "… tu dirai di ciò che è reale che è vero e di ciò che non è reale che non è vero". Essa raccomanda di fondare la scienza sulla corrispondenza tra la *realtà* e la *verità*, sottintendendo in questo modo la partizione dell'esistente in oggetti osservabili e soggetti osservatori; infatti la realtà è propria di ciò che è osservato e la verità è propria degli osservatori. Il dogma parmenideo contiene tuttavia il germe di una deriva metafisica: se la *verità* può dirsi tale solo se vale sempre, allora la *realtà* deve essere eterna e immutabile. Lo sbocco inevitabile di questo modo di pensare sarebbe stata la filosofia di Platone (427-347 a.C.), per il quale le cose reali vere non sono quelle che si osservano in natura ma le idee matematiche che le spiegano, che appartengono ad un mondo superiore. Il rischio della deriva metafisica poteva essere evitato solo attribuendo alla corrispondenza realtà-verità un significato contingente, quello di una relazione tra fatti naturali ed enunciati logici e, ancor prima, quello di una relazione tra fatti possibili e proposizioni logiche. Ma ciò non poteva avvenire prima che fosse chiaro cosa si dovesse intendere col termine "possibilità" e quali regole bisognasse applicare alle relazioni tra le proposizioni che le descrivono. Per arrivare a questo dovettero passare circa cento anni.

Potrà sembrare strano, ma agli albori del pensiero scientifico la nozione di *possibilità*, come la intendiamo oggi, non era affatto scontata. La proposizione: "*una cosa si dice possibile se prima o poi sarà vera*" (dato che se è impossibile non sarà mai vera, e se non sarà mai vera allora bisogna pensare che è impossibile) è passata alla storia della filosofia col nome di *argomento maestro* di Diodoro Crono di Mègara (?-307 a.C.). La proposizione di Diodoro discendeva dalla visione deterministica del mondo fisico ispirata dalla teoria atomistica di Democrito. Sarebbe perciò più corretto riformulare l'argomento di Diodoro nel seguente modo: *se le leggi che governano il corso degli eventi sono deterministiche, allora bisogna definire il possibile come ciò che prima o poi sarà vero*. È chiaro che il rifiuto di questa definizione avrebbe implicato in qualche modo una critica del determinismo.

Il grande Aristotele (384-322 a.C.) si oppose strenuamente al modo di pensare di Diodoro. Nel suo libro sulla Metafisica egli scrisse contro i megarici: "*È possibile che io sia un costruttore anche se non costruisco e che io stia in piedi anche se sono seduto*". In quel modo egli asseriva che un fatto può dirsi "possibile" anche se non è mai accaduto, se non accade e non accadrà mai. Chiaramente, il suo modo di pensare implicava una visione indeterministica, o almeno non perfettamente deterministica. Del resto Aristotele ammetteva esplicitamente che *alcune cose accadono per necessità e altre per caso*. È significativo che alla base del pensiero fisico sia sempre stata posta la nozione di possibilità di Aristotele e non quella di Diodoro.

Dopo la morte di Alessandro Magno e poco dopo di Aristotele, che ne era stato il maestro, la filosofia entrò in una fase nuova, che gli storici hanno definito ellenistica, nella quale il pensiero del sommo filosofo trovò le condizioni ideali per il suo naturale sviluppo. Essa ebbe il suo maggiore centro culturale in Alessandria d'Egitto, dove fiorì un pensiero scientifico di livello assai più evoluto e raffinato di quello che comunemente si crede. Fu questa l'epoca di Euclide (circa 365-300 a.C.), Apollonio (262-190 a.C), Archimede (287-212 a.C.) e altri grandi matematici e fisici. Essa durò circa due secoli e si estinse in seguito alla dominazione romana, principalmente a causa del fatto che la cultura latina era incapace di accoglierne l'eredità (Russo, 1997).

Nella straordinaria parentesi culturale ellenistica, la critica del determinismo ebbe uno dei suoi maggiori fautori in Epicuro di Samo (341-271 a.C.). L'argomento centrale della filosofia epicurea era che, se il mondo fosse governato da leggi deterministiche, allora non si potrebbe spiegare l'esistenza di esseri viventi dotati di libero arbitrio. Bisognava per forza concludere che la natura non può essere governata da leggi deterministiche (Lucrezio, 98-55 a.C.).

In realtà il dibattito filosofico fu caratterizzato dal contrasto tra la dottrina epicurea e quella *stoica*, così chiamata perché fu inizialmente insegnata da Zenone di Cizio (~300 a.C.) nella *Stoà*, un famoso porticato dell'antica Atene decorato con pregevoli dipinti.

Il massimo rappresentante del pensiero stoico in periodo ellenistico fu Crisippo di Soli (281-206 a.C.), cui si attribuisce il merito di avere scoperto il calcolo proposizionale della logica classica 2100 anni prima di George Boole (1815-1864). Sembra che Crisippo abbia scritto più di 700 libri, nessuno dei quali ci è pervenuto. Del suo pensiero scientifico, si sa che egli asseriva che il corso degli eventi naturali è determinato dalla *necessità logica*. Così, a dispetto dell'indeterminismo epicureo, la filosofia stoica venne a stabilire un legame solido e fatale tra la visione deterministica del mondo fisico e la logica classica. Questo legame sarebbe durato fino agli anni '20 del '900, quando la scoperta dei fenomeni quantistici fece crollare la visione deterministica insieme alla logica classica.

2. Il ruolo della logica nel linguaggio fisico

Come s'è detto, la nozione aristotelica di possibilità ebbe una grande importanza per la nascita della fisica, basti pensare che gli spazi degli stati sono intesi a descrivere tutte le possibilità di un sistema fisico, anche quelle che non si realizzano mai.

Queste "possibilità" intervengono nella logica del linguaggio fisico per la seguente ragione: le proposizioni che descrivono le proprietà di un sistema definiscono in ultima analisi l'appartenenza dello stato del sistema a particolari porzioni dello spazio degli stati. In questo modo, la struttura logica del linguaggio fisico finisce per riflettere quella dello spazio degli stati. In particolare, le relazioni e le operazioni logiche corrispondono a relazioni e operazioni ammissibili negli spazi degli stati. Così, ad esempio, se diciamo che la proprietà fisica A implica la proprietà fisica B intendiamo che la porzione dello spazio degli stati che rappresenta A è inclusa in quella che rappresenta B. Appare chiaro allora perché tutte le volte che è la proprietà A è soddisfatta anche B è automaticamente soddisfatta.

Trasferendo questo concetto dalla fisica alla logica, arriviamo alla nozione di *implicazione logica*: diremo che la proposizione P implica la proposizione Q se tutte le volte che P è vera anche Q è vera. Per rappresentare questa relazione scriveremo $P \leq Q$, che si può anche leggere P è minore o uguale a Q.

La relazione d'implicazione è riflessiva e transitiva: $P \leq P$ vale sempre e da $P \leq Q$ e $Q \leq R$ segue $P \leq R$. Perciò, sulla base di questi ordinamenti, potrà avere senso considerare proposizioni massime e minime. Tuttavia, poiché tra due proposizioni non esiste necessariamente una relazione d'implicazione, una rete di implicazioni stabilisce in generale soltanto un *ordinamento parziale* di proposizioni.

In Fig.1, a sinistra, l'implicazione è rappresentata da una freccia che va dalla proposizione implicante Q a quella implicata P. In generale un semplice ordinamento parziale di implicazioni non basta a formare una logica ma bisogna che per ogni insieme di proposizioni P_1, P_2, ..., P_n, esista una *proposizione minima* $Q_{\min} = P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n$ implicata da tutte le proposizioni e una *proposizione massima* $Q_{\max} = P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ che le implica tutte. I simboli $\vee$ (OR) e $\wedge$ (AND) si chiamano *connettivi logici*; essi rappresentano rispettivamente l'operazione di *disgiunzione* e quella di *congiunzione* (Fig.1 a destra). Un ordinamento parziale completato in questo modo si chiama *reticolo*.

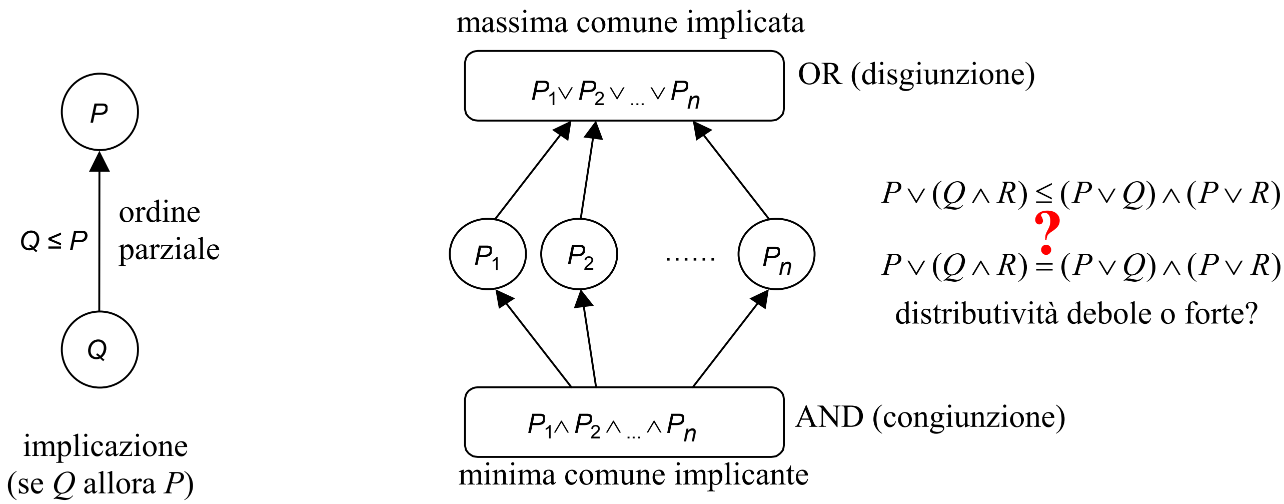


Figura 1.

Non è difficile dimostrare, sulla base di queste definizioni, che per ogni terna di proposizioni P, Q, R vale la relazione di *distributività debole* $P \vee (Q \wedge R) \leq (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ e anche la sua duale $P \wedge (Q \vee R) \geq (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$, che si ottiene scambiando $\vee$ con $\wedge$ e $\leq$ con $\geq$. Si dimostra altrettanto facilmente che se la relazione di *distributività forte* $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ vale sempre allora vale sempre anche la sua duale $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$; in questo caso la logica si dice *distributiva*. Alla domanda se una logica della fisica debba essere necessariamente distributiva la risposta è NO!

Un'altra importante proprietà della logica della fisica è l'esistenza della *negazione*: se una proprietà fisica non vale allora vale la sua contraria. Perciò, per ogni proposizione P esiste una proposizione $\sim P$ tale che quando P è vera $\sim P$ è falsa e viceversa. La negazione incide sulle relazioni di implicazione e sui connettivi logici nel modo indicato dalle formule:

$$Q \leq P \Rightarrow \; \sim P \leq \; \sim Q \text{ da cui: } \sim\sim P = P; \qquad \sim(Q \wedge P) = (\sim Q) \vee (\sim P); \quad \sim(Q \vee P) = (\sim Q) \wedge (\sim P).$$

Vale pertanto la *legge di dualità*: tutte le formule rimangono valide quando si scambia ≤ con ≥, ∧ con ∨, *P* con ~*P*, *Q* con ~*Q* ecc. (non è così per altre logiche della matematica, come ad esempio la logica intuizionista). Una logica che gode di questa proprietà si chiama *ortocomplementata*. Essa possiede un massimo assoluto *I* (*la proposizione sempre vera o assoluta*) e un minimo assoluto *O* (*la proposizione sempre falsa* o *proposizione nulla*). Le proprietà reticolari della negazione sono illustrate in Fig.2.

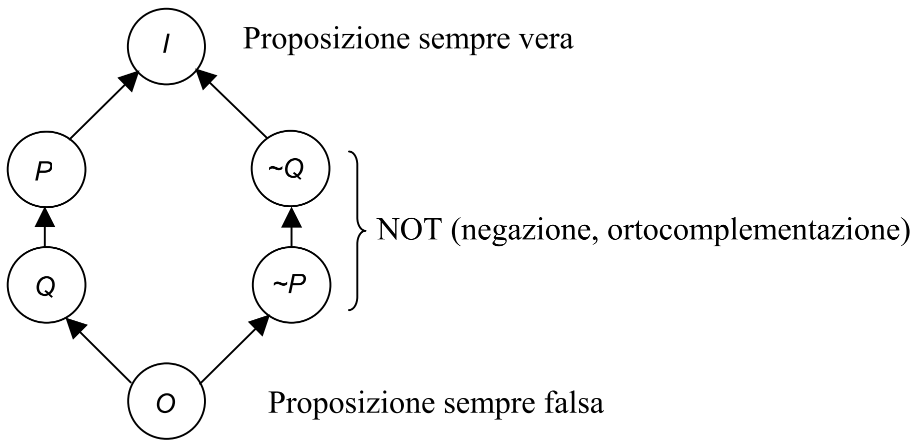
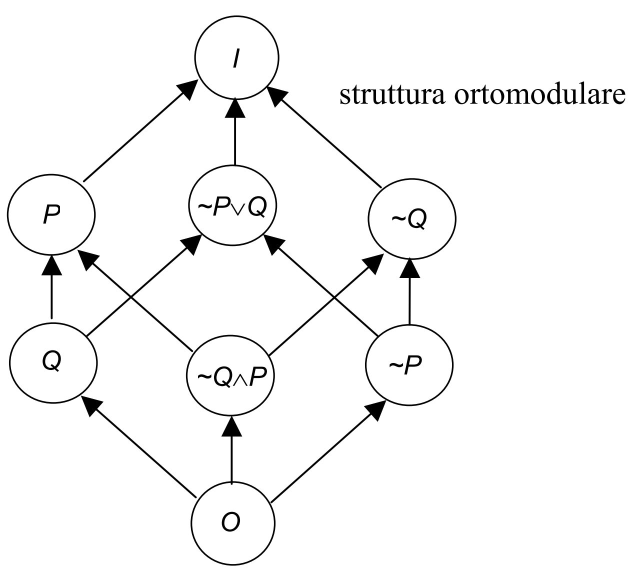


Figura 2.

3. Una logica della fisica deve essere ortomodulare e atomistica

In generale, ogni proprietà fisica può essere analizzata e decomposta in proprietà più semplici. Ciò significa che, in generale, ogni porzione dello spazio degli stati può essere divisa in almeno due parti. Il corrispondente logico è che ogni proposizione del linguaggio fisico è in generale *dicotomica* - cioè, la disgiunzione di due proposizioni non nulle ciascuna delle quali è la *negazione relativa* dell'altra (alternative). Una logica che gode di queste proprietà si dice *ortomodulare*. La struttura caratteristica di un reticolo ortomodulare è rappresentata in Fig.3.



$$Q \le P \;\Rightarrow\; Q \vee (\sim Q \wedge P) = P$$

assioma di ortomodularità

Figura 3.

In fisica, si assume inoltre l'esistenza di *stati puri*, che rappresentano le situazioni ideali in cui si assume che tutte le proprietà del sistema siano determinate con la massima precisione, vuoi per definizione vuoi attraverso una serie infinita di esperimenti ideali. Le proposizioni di una logica ortomodulare che descrivono gli stati puri sono in generale proposizioni che hanno senso solo in un contesto matematico. Esse non sono ulteriormente decomponibili in alternative perché sono implicate solo dalla proposizione nulla, in breve non sono dicotomiche. Per questa ragione si dicono *atomiche*.

In ogni caso l'ortomodularità assicura che uno stato fisico sia descrivibile mediante una sequenza finita o infinita di alternative logiche e che sia pertanto indicizzabile mediante una successione finita o infinita di 0 e 1 (bit); in pratica da uno o più numeri reali.

In fisica si assume infine che ogni porzione dello spazio degli stati sia formata da stati puri. Perciò le proposizioni non atomiche che descrivono queste porzioni devono potersi presentare come disgiunzioni di proposizioni atomiche. Una logica con questa proprietà si dice *atomistica*.

4. Valori di verità, valori di aspettazione e spazi degli stati classici

La fisica classica è fortemente condizionata dalla logica classica alla visione deterministica. Vediamo perché. Per essere certi che un sistema abbia o non abbia una certa proprietà bisogna fare uno più esperimenti, e può capitare che uno stesso esperimento ripetuto in identiche condizioni fornisca risultati diversi. In questo caso il risultato sperimentale è un insieme statistico di dati. È pertanto naturale attribuire alle proposizioni logiche che descrivono le proprietà di un sistema fisico dei *valori di aspettazione*, che, in qualche modo, valgono come predizioni di risultati sperimentali.

Ora, i *valori di aspettazione* di una proposizione della logica classica sono 0 = FALSO e 1 = VERO, senza casi intermedi. In altri termini, nella logica classica vale il principio del *terzo escluso* e non si contempla la possibilità che il valore di aspettazione sia *indeterminato*. Si dimostra abbastanza facilmente che il principio del terzo escluso forza una logica *ortocomplementata* ad essere distributiva e ortomodulare, in breve *booleana*. In questo caso vale il seguente teorema (Stone, 1936):

Le proposizioni di una logica booleana possono essere rappresentate come sottoinsiemi di un insieme di punti. Se la logica è inoltre atomistica, tutte le proposizioni del linguaggio sono rappresentate da tutti i sottoinsiemi di un insieme di punti (se non è atomistica allora le proposizioni sono rappresentate da insiemi misurabili di punti definiti a meno di insiemi di misura nulla).

In questa rappresentazione, la negazione di una proposizione P è rappresentata dal *sottoinsieme complementare* $\sim P$ (Fig.4a). La disgiunzione $P \vee Q$ equivale all'unione insiemistica $P \cup Q$ e la congiunzione $P \wedge Q$ all'intersezione insiemistica $P \cap Q$. Applicando opportunamente negazioni ed intersezioni alle proposizioni di una sequenza di implicazioni come $O \leq P_1 \leq P_2 \leq P_3 \leq I$ (Fig.4b) si può decomporre la proposizione assoluta I nelle proposizioni a due a due disgiunte O, P_1, $\sim P_1 \wedge P_2$, $\sim P_2 \wedge P_3$, $\sim P_3$ (Fig.4c). Questa decomposizione corrisponde alla ripartizione dell'insieme di tutte le possibilità I in una collezione di possibilità reciprocamente esclusive (alternative).

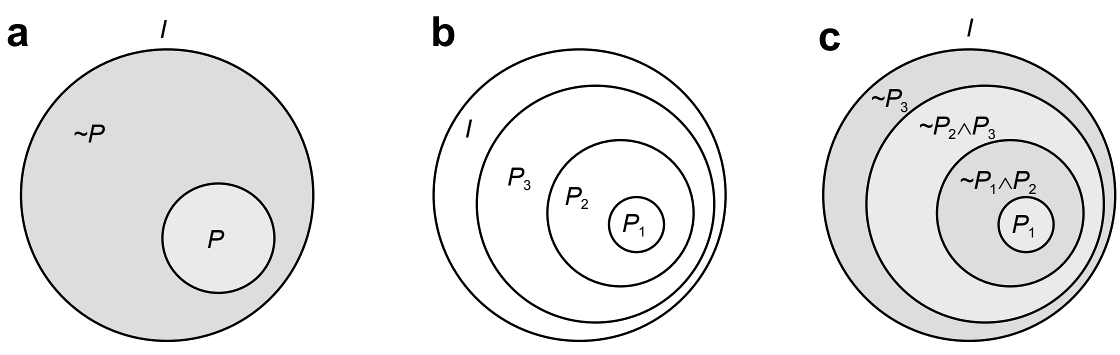


Figura 4.

Il corrispettivo fisico di questo stato di cose è che ogni ragionamento fisico equivale ad una sequenza di operazioni sugli insiemi.

Se si assume che la logica classica sia atomistica, allora si spiega perché lo spazio degli stati abbia la struttura di un *insieme di punti* e anche perché l'evoluzione - continua nel tempo - di ogni sistema sia descritta dal cammino di un punto in un continuo di punti, com'è infatti ogni spazio degli stati classici. In questa struttura logica, la condizione di minima indeterminazione dei valori di aspettazione è perfettamente concepibile. Essa si ha quando il cammino è governato da una legge deterministica.

La teoria delle probabilità classica generalizza queste nozioni introducendo valori di aspettazione indeterminati, intermedi tra 0 e 1, che sono usati per fornire predizioni statistiche. Chiaramente, le logiche probabilistiche violano il principio del terzo escluso, tuttavia, poiché le probabilità classiche sono definite come misure di insiemi di punti, la struttura insiemistica sottostante è mantenuta e con essa è mantenuta anche la rappresentazione dello stato puro come punto di un insieme. Si avvalora in questo modo una concezione della teoria delle probabilità in cui l'indeterminazione del valore di aspettazione è spiegata con le deviazioni di cammino del punto rappresentativo dello stato causate da perturbazioni dagli effetti imponderabili o con l'incertezza della posizione del punto dovuta ad una conoscenza imperfetta delle condizioni iniziali.

Bisogna tuttavia considerare che l'esistenza di valori d'aspettazione indeterminati non comporta che la logica sia necessariamente classica: *se si abolisce il principio del terzo escluso non è più possibile dimostrare che una logica ortocomplementata, o addirittura ortomodulare, possiede solo rappresentazioni insiemistiche*. Resta così aperta la possibilità di rappresentare la logica dei sistemi fisici in strutture matematiche di altro tipo (Birkhoff e von Neumann, 1936).

5. Gli spazi degli stati quantistici

La logica della meccanica quantistica è *indeterministica in senso forte*. I valori d'aspettazione delle proposizioni logiche sono in generale probabilistici, ma l'indeterminazione a questi associata non è dovuta a una ignoranza delle perturbazioni o a una conoscenza imperfetta delle condizioni iniziali. In altri termini, l'indeterminazione non può essere diminuita a piacere aumentando la precisione degli apparati sperimentali e bisogna pertanto assumere che essa sia intrinseca alla natura stessa del sistema.

Se le cose stanno in questo modo, allora il vincolo che impone ad una logica ortocomplementata di essere booleana, e di soddisfare pertanto alla legge di distributività forte, deve venire meno. Le proposizioni debolmente distributive, come quelle di una logica strettamente ortomodulare, non possono essere rappresentate da sottoinsiemi di un insieme, la negazione non può essere rappresentata da un complemento insiemistico e i connettivi logici non possono essere equivalenti a unioni e intersezioni di insiemi. Quali rappresentazioni matematiche sono allora possibili per gli spazi degli stati fisici?

Il matematico belga Piron ha dimostrato che le proposizioni di una logica ortomodulare, non booleana ma atomistica, e dotata di valori di aspettazione probabilistici, devono essere rappresentate o come sottospazi di uno spazio singolo, formato da vettori uscenti tutti da uno stesso punto e dotati di *prodotto scalare* (spazio vettoriale normato), oppure dai sottospazi di un prodotto diretto, vale a dire di una collezione ordinata, di spazi singoli. È naturale assumere che i prodotti diretti di spazi siano adatti a descrivere collezioni di sistemi fisici indipendenti e che sia pertanto sufficiente considerare solo le rappresentazioni in spazi singoli. In ciascuno spazio si possono scegliere infiniti sistemi di riferimento diversi. Gli spazi singoli con infinite dimensioni si chiamano *hilbertiani*.

La conseguenza immediata della rappresentazione vettoriale degli stati è che la disgiunzione di due proposizioni atomiche non è la semplice unione insiemistica dei due vettori, ma il piano da essi abbracciato. Pertanto essa contiene infiniti vettori diversi dai due dati. Più in generale, una proposizione non atomica P è rappresentata da un sottospazio, anche di infinite dimensioni, dello spazio hilbertiano.

A differenza dal caso classico, la negazione $\sim P$ di una proposizione quantistica P non è rappresentata da un insieme complementare di proposizioni atomiche, ma dal sottospazio ortogonale a quello rappresentato da P (Fig. 6a). Una catena di implicazioni, ad esempio $0 \leq P_1 \leq P_2 \leq P_3 \leq I$, è rappresentata da una specie di *matrioska* di sottospazi (Fig.6b) e, come nel caso classico, mediante negazioni e congiunzioni di queste proposizioni si decomporre la proposizione assoluta I in una collezione di proposizioni disgiunte O, P_1, $\sim P_1 \wedge P_2$, $\sim P_2 \wedge P_3$, $\sim P_3$, che denotano una collezione di possibilità reciprocamente esclusive (alternative), con la differenza che ora queste proposizioni non sono più rappresentate da una partizione insiemistica, ma da una collezione di sottospazi a due a due ortogonali (Fig.6c). Questa rappresentazione sarebbe equivalente a quella descritta in Fig.5 solo se le probabilità degli stati Q che si trovano fuori dai blocchi diagonali fossero trascurabili. Questo è ciò che accade al limite classico della meccanica quantistica, quando si fa tendere a zero la costante di Planck.

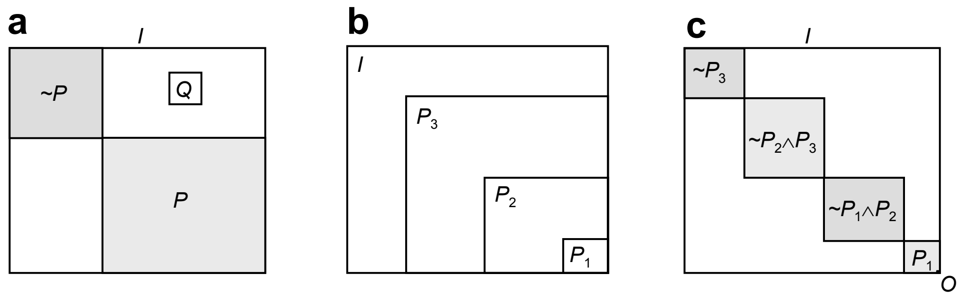


Figura 6.

Chiaramente, queste proprietà formali della logica quantistica sono tali da determinare una rivoluzione dei significati fisici. Nella meccanica quantistica non vale la regola della composizione insiemistica degli stati ma quella della loro composizione vettoriale. In particolare, gli stati puri possono essere combinati associativamente e commutativamente formando altri stati puri e, viceversa, ogni stato puro può essere decomposto in somme aritmetiche vettoriali di altri stati puri. Questo significa che le proprietà fisiche non possono essere considerate come "insiemi di possibilità reciprocamente esclusive", ma come "spazi di possibilità generalmente non esclusive", che possono essere proiettate in modi diversi sugli assi di sistemi di riferimento diversi. Il principio leibniziano di *concorrenza dei possibili* è rimpiazzato dal principio di *sovrapposizione dei possibili*, nel senso che più possibili possono essere sovrapposti l'uno sull'altro per formare nuovi possibili.

Questi risultati sono assai soddisfacenti. Essi indicano che non ci sono molte possibilità nella scelta delle logiche che possono strutturare il linguaggio di una fisica indeterministica in senso forte. Purtroppo i puri argomenti logici non bastano a stabilire perché queste rappresentazioni degli stati siano necessarie alla fisica né quale debba essere il campo numerico in cui è definito il calcolo vettoriale. Con tutta generalità esso potrebbe essere altrettanto legittimamente *reale, complesso o quaternionico*. Si pongono pertanto due importanti quesiti:

- *Come nasce l'evidenza sperimentale della necessità di abbandonare la logica classica a favore di quella quantistica?*
- *Come si spiega che gli stati della meccanica quantistica siano rappresentati da vettori definiti nel campo dei numeri complessi, ma non in quello dei numeri reali o in quello dei quaternioni?*

6. Le probabilità classiche evolvono irreversibilmente ...

Nella fisica classica l'imprevedibilità del comportamento di un sistema fisico può sempre essere attribuita all'ignoranza delle cause che determinano le deviazioni dall'evoluzione deterministica. L'*entropia* termodinamica, che rappresenta il grado di disordine del sistema, non è altro che la misura della perdita d'informazione circa lo stato del sistema. Perciò l'entropia aumenta irreversibilmente solo perché l'informazione su ciò che accade diminuisce progressivamente. In queste condizioni la descrizione di un sistema fisico si può ottenere solo mediante distribuzioni probabilistiche degli stati.

Gli effetti delle piccole perturbazioni che alterano in modo imprevedibile la dinamica di un sistema sono cumulativi e comportano un progressivo degrado della capacità di descrivere il sistema. L'irreversibilità del comportamento si traduce in un progressivo sparpagliamento delle distribuzioni di probabilità, del tipo caratteristico di tutti i processi di diffusione.

I processi di questo tipo sono esemplificati in Fig.7. Le perturbazioni che incidono sulla precisione con cui è possibile determinare la traiettoria di un particella classica che viaggia all'interno di un gas rarefatto partendo da una sorgente *S* è rappresentata dalle linee a zig-zag. Una griglia di rivelatori inserita in varie posizioni *G*, *G'*, *G"* ... può intercettare la posizione del particella durante il tragitto. Le predizioni sullo stato della particella in corrispondenza delle diverse posizioni della griglia possono essere solo statistiche e perciò rappresentate da distribuzioni di probabilità *P*, *P'*, *P''*. Ad ogni stadio del tragitto compiuto dalla particella si apre un nuovo ventaglio di cammini possibili (linee tratteggiate) e i gradi di sparpagliamento delle distribuzioni di probabilità aumentano in modo irreversibile.

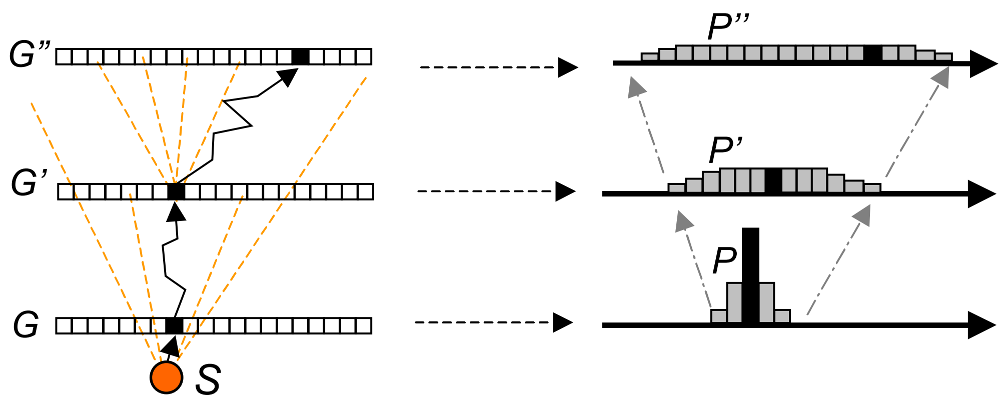


Figura 7.

7. ... quelle quantistiche evolvono reversibilmente!

L'analogo quantistico del processo descritto nel paragrafo precedente è illustrato in Fig.8. In questo caso al posto di una particella classica abbiamo un quanto di luce, emesso da una sorgente *S*, che si propaga attraverso un mezzo vuoto nel quale sono disposte due lenti convesse coassiali che focalizzano la luce in un punto *F*. Se si trattasse di un'onda elettromagnetica del tipo descritto dalla fisica classica, potremmo rappresentarne l'intensità luminosa come una variabile continua suscettibile di assumere anche valori infinitesimali e prevederne tutti i valori in modo deterministico in tutti i punti del mezzo.

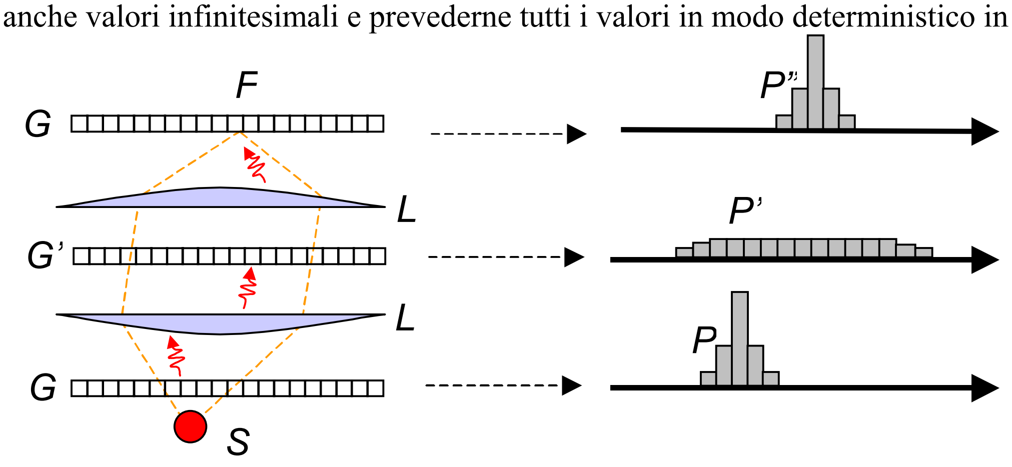


Figura 8.

Purtroppo la descrizione classica è in conflitto con la termodinamica: se le onde elettromagnetiche fossero un continuo, la radiazione all'interno di un forno avrebbe infiniti gradi di libertà. Pertanto il calore specifico sarebbe infinito e l'equilibrio termodinamico sarebbe impossibile. Fu proprio per salvare la termodinamica che nel 1901 Max Planck introdusse l'ipotesi dei *quanti*: la minima quantità di energia trasportata da un'onda luminosa di frequenza ν deve essere $h\nu$, dove h è una costante universale. Se le cose stanno così allora non ha senso considerare intensità luminose di energia infinitesima e bisognerà assumere che i fasci di luce di debolissima intensità funzionino come sciami di *quanti* di energia $h\nu$ rivelabili nelle varie posizioni dello spazio con probabilità proporzionali alle intensità luminose classiche. Per osservare la presenza dei quanti si potrà inserire nel sistema su descritto una griglia di rivelatori in una delle tre diverse posizioni G, G', G'', rispettivamente a monte, in mezzo e a valle del sistema ottico. Ripetendo l'esperimento un grandissimo numero di volte si potranno ottenere tre distribuzioni statistiche corrispondenti alle tre posizioni della griglia. Poiché la propagazione dei quanti è governata dalle leggi dell'ottica, i profili delle distribuzioni di probabilità P, P', P'' dovranno riprodurre quelle dell'intensità luminosa della luce in corrispondenza delle tre posizioni. Ora, in virtù delle proprietà di convergenza e divergenza delle lenti, le tre distribuzioni di probabilità saranno più concentrate in prossimità di S e F e più sparpagliate sul piano posto tra le lenti.

Chiaramente, questo comportamento è di un tipo completamente diverso da quello di una particella classica: *la propagazione del quanto non presenta il fenomeno dello sparpagliamento caratteristico delle distribuzioni di probabilità classiche*.

Si tratta dunque di un comportamento assolutamente nuovo e inspiegabile sulla base di ragionamenti logici classici. Esso sembra violare il principio d'irreversibilità dei fenomeni classici. In particolare esso contrasta con l'ipotesi che l'indeterminazione del comportamento sia dovuta ad una perdita di informazione circa lo stato del sistema. Nel caso quantistico, l'informazione sulla posizione del quanto è inizialmente grande in prossimità della sorgente luminosa S, diventa poi piccola nella regione intermedia del sistema ottico e infine è miracolosamente riguadagnata a valle in prossimità del fuoco F.

8. ***Le probabilità quantistiche sono funzioni continue dello stato quantistico***

Come si deduce dagli esperimenti ideali discussi nei paragrafi precedenti, le distribuzioni di probabilità quantistiche, esattamente come quelle classiche, descrivono le proprietà di un sistema mediante osservazioni ripetute in identiche condizioni iniziali da opportuni apparati (griglie di rivelatori) diversamente disposti nello spazio e a intervalli temporali diversi dall'istante iniziale.

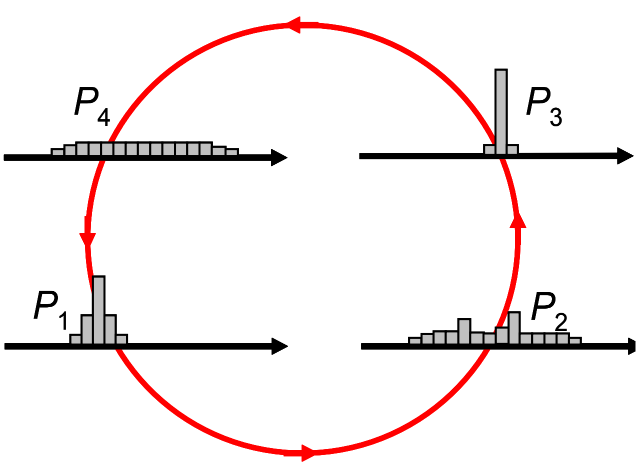


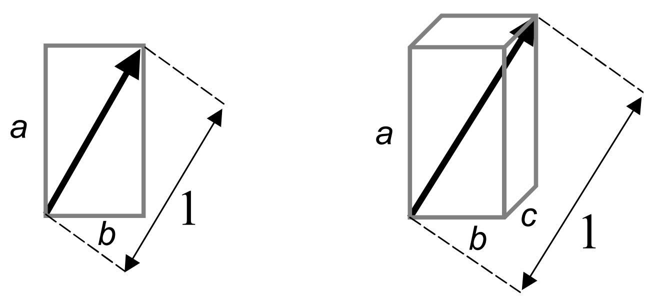
Fig.9.

Tuttavia, a differenza dalle distribuzioni classiche che si sparpagliano irreversibilmente nel corso del tempo, quelle quantistiche sembrano avere la magica proprietà del comportamento reversibile: come le onde luminose, esse possono ritornare ad una configurazione meno sparpagliata dopo aver subito uno sparpagliamento. Ad esempio, la sequenza di distribuzioni $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4$ esemplificata in Fig.9 può ripetersi periodicamente per un tempo indefinito. In generale, tutti i possibili valori di aspettazione p_1, p_2, p_3 .... di una distribuzione di probabilità quantistiche possono evolvere *reversibilmente e con continuità* in modo arbitrario nel corso del tempo purché le relazioni $p_1+p_2+p_3+...=1$ e $0 \le p_i \le 1$, che rappresentano rispettivamente le condizioni di *conservazione* e *positività* delle probabilità, siano sempre soddisfatte. La continuità temporale dei profili di probabilità è un residuo della legge di continuità dell'evoluzione dei sistemi classici: modificazioni di piccola entità producono effetti di piccola entità (*natura non facit saltus*). Ma ciò che caratterizza il comportamento delle distribuzioni di probabilità quantistiche è che esse si comportano come se dipendessero da "qualcosa" che evolve reversibilmente e con continuità in un misterioso mondo che si nasconde dietro quello dei fenomeni osservati. E' chiaro che questo "qualcosa" non può essere altro che lo *stato* stesso del sistema quantistico, poiché le distribuzioni di probabilità non fanno altre che fornire informazioni sullo stato del sistema. Si pone dunque il problema di capire in termini matematici come le probabilità quantistiche dipendano dallo stato del sistema.

9. La natura "pitagorica" delle probabilità quantistiche

La quantizzazione rende dunque necessaria una teoria probabilistica della causalità fisica in cui la nozione di entropia (o quella strettamente correlata di informazione) assume un significato relativo: *l'entropia (o l'informazione) può avere valori diversi rispetto a modi di osservazione diversi e può aumentare o diminuire con continuità al variare di questi*.

La somma delle probabilità quantistiche si comporta dunque come l'*invariante di un gruppo continuo di trasformazioni*, precisamente come il quadrato della norma di un vettore di modulo 1 (vettore unitario) che ruota in uno spazio multidimensionale. Se le probabilità quantistiche sono funzioni dello stato quantistico allora gli stati devono essere rappresentati da vettori unitari che si trasformano con continuità nel corso del tempo. In Fig.10 è rappresentata l'analogia tra il teorema di Pitagora applicato a un parallelepipedo multidimensionale di diagonale 1 e le condizioni di conservazione e positività di un insieme completo di valori di probabilità.



$$0 \le a^2, b^2, c^2 \le 1; \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1;$$

$$0 \le p_i \le 1; \qquad p_1 + p_2 + ... + p_N = 1.$$

Fig.10.

Tutto ciò conferma quanto era stato possibile determinare nel paragrafo 5 sulla base di considerazioni puramente logiche.

10. ***Arithmetica est omnis divisa in partes tres***

Poste le cose nel modo indicato nel paragrafo precedente, un matematico avveduto potrebbe sollevare il seguente "trilemma": a quale dei tre campi numerici logicamente ammissibili appartengono le componenti dei vettori di stato che determinano i valori delle probabilità? *Ai numeri reali r, ai complessi z o ai quaternioni q?*

Infatti, in corrispondenza di questi tre diversi casi, potremmo scrivere la legge di conservazione delle probabilità in una delle seguenti forme:

Caso reale: $r_1^2 + r_2^2 + ... = 1$,

Caso complesso: $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots = 1$, *Caso dei quaternioni*: $|q_1|^2 + |q_1|^2 + \ldots = 1$,

dove le sbarrette indicano i *moduli* o *valori assoluti* dei numeri r_i, z_i, q_i.

È chiaro che a questo punto s'impone un chiarimento. Come nascono i numeri "non reali" z e q? Come sono definiti i loro "moduli"? La rilevanza scientifica di questo argomento merita una breve digressione che indirizzo volentieri anche ai lettori che non abbiano una preparazione matematica specialistica.

La condizione che ogni operazione aritmetica, tranne la divisione per zero (che non si può fare) abbia sempre un'inversa, unitamente alla condizione che esistano numeri infiniti, caratterizzano l'insieme dei numeri reali come un *campo numerico*. Se cerchiamo di trovare tutti gli algoritmi simili che soddisfano alle condizioni su elencate si scopre che solo altri due algoritmi possiedono i requisiti richiesti: l'aritmetica che opera nel *campo dei numeri complessi* e quella che opera nel *campo dei quaternioni*. In Fig.11 sono illustrate le rappresentazioni geometriche di questi numeri: l'asse dei

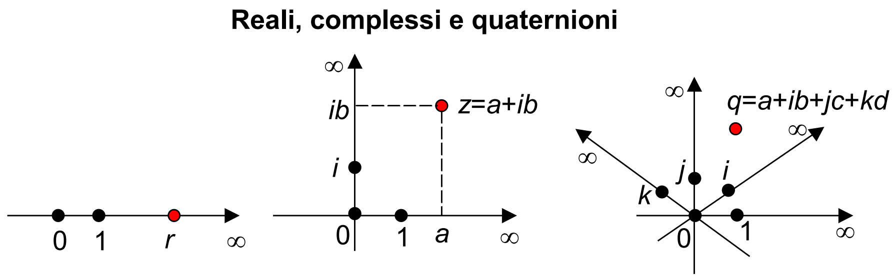


Fig.11

numeri reali r, il piano di Argand e Gauss dei numeri complessi $z = a+ib$, dove il numero complesso z è rappresentato come un vettore di componenti reali (a, b), e lo spazio quadridimensionale dei quaternioni $q=a+ib+jc+kd$, dove il quaternione q è rappresentato da un vettore a quattro componenti reali (a, b, c, d). Naturalmente in questo caso la figura rappresenta l'idea in modo schematico.

I numeri complessi sono ben noti a matematici, fisici e ingegneri ed è una vera disdetta che in Italia non vengano insegnati nelle scuole medie superiori. Oltre all'unità reale 1, definita dall'equazione $1^2=1$, essi possiedono anche un'*unità immaginaria*, solitamente indicata con i, definita dall'equazione $i^2 = -1$. Il modulo, o valore assoluto, di un numero complesso $z = a+ib$, è la lunghezza del vettore z che lo rappresenta sul piano di Argand e Gauss, cioè il numero reale positivo $|z|=\sqrt{(a^2+b^2)}$. Il prodotto di due numeri complessi $z = a+ib$ e $z' = a'+ib'$ è $(a+ib)(a'+ib') = aa'-bb'+ i(ab'+ba')$. Chiaramente, questo prodotto gode della proprietà commutativa.

I quaternioni, scoperti nel 1843 dal fisico-matematico irlandese William Rowan Hamilton, sono assai meno noti. Essi costituiscono l'unica generalizzazione possibile dei numeri complessi ordinari, ma con la differenza che essi possiedono tre unità immaginarie i, j, k. Come per il caso dei numeri complessi, queste unità immaginarie soddisfano alle relazioni $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. I prodotti di queste unità non godono tuttavia della proprietà commutativa, ma di quella *anticommutativa*: $ij = -ji = k$; $jk=-kj = i$; $ki = -ik = j$.

Pertanto, a differenza delle moltiplicazioni tra numeri reali o complessi, quelle tra quaternioni non sono in generale commutative. A parte questo, tutte le altre proprietà (associativa, distributiva, ecc.) sono simili a quelle dei numeri reali e dei complessi. In particolare, il modulo, o valore assoluto, di un quaternione $q=a+ib+jc+kd$ è il numero reale positivo $|q|= \sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)}$, che rappresenta la lunghezza del vettore quadridimensionale di componenti reali (a, b, c, d).

Sulla base di queste proprietà si trova facilmente che il prodotto di due quaternioni $q=a+ib+jc+kd$, e $q'=a'+ib'+jc'+kd'$ è $qq'=(a+ib+jc+kd)(a'+ib'+jc'+kd') = aa'-bb'-cc'-dd' + i(ab' +ba'+cd'-dc') + j(ac'+ca'+da'-ad') + k(ad'+da'+bc'-cb')$. Si verifica facilmente che $qq' \neq q'q$.

11. Le trasformazioni degli stati quantistici sono unitarie

Seguendo i ragionamenti introdotti nei paragrafi 7, 8 e 9, siamo portati a rappresentare gli stati di un sistema quantistico come vettori di uno spazio multidimensionale. Un vettore $\vec{v}$ di uno spazio a N dimensioni, di componenti v_1, v_2, …, v_N definite in uno qualsiasi dei tre campi numerici, si dice unitario se ha lunghezza 1, cioè se $|v_1|^2 + |v_2|^2 + \ldots + |v_N|^2 = 1$. Una trasformazione T che applicata a $\vec{v}$ produce il vettore $\vec{v}'$ si indica con T: $\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = T\ \vec{v}$. Essa si dice *unitaria* se lascia invariata la lunghezza del vettore $\vec{v}$. Avendo espresso le probabilità come quadrati moduli di componenti vettoriali, è chiaro che la legge di conservazione della probabilità impone che le trasformazioni dei vettori siano unitarie.

Le trasformazioni unitarie dei vettori reali T: $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$, quelle dei complessi T: $\vec{z} \rightarrow \vec{z}'$ e quelle dei quaternioni T: $\vec{q} \rightarrow \vec{q}'$ devono pertanto soddisfare alle seguenti equazioni

Caso reale: $r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_N^2 = r'^2_1 + r'^2_2 + \ldots + r'^2_N = 1$

Caso complesso: $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_N|^2 = |z'_1|^2 + |z'_2|^2 + \ldots + |z'_N|^2 = 1$

Caso quaternionico: $|q_1|^2 + |q_2|^2 + \ldots + |q_N|^2 = |q'_1|^2 + |q'_2|^2 + \ldots + |q'_N|^2 = 1$

Applicando a un vettore reale, complesso o quaternionico tutte le possibili trasformazioni che soddisfano alle proprietà indicate si ottengono rispettivamente tre insiemi di vettori ***R***, ***Z*** e ***Q***, usualmente chiamati *spazi unitario reale, complesso* e *quaternionico a N dimensioni*. Si dimostra facilmente che nei tre casi le trasformazioni unitarie dipendono rispettivamente da $N(N-1)/2$, N^2 ed $2N^2-N$ parametri indipendenti.

12. Grandezze osservabili, autovalori e autostati

I processi di osservazione e misura degli stati di un sistema quantistico sono schematizzati in Fig.12.

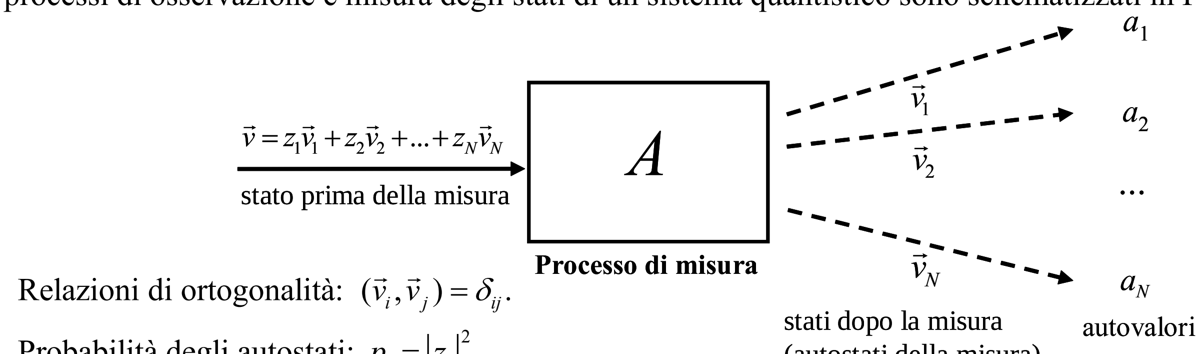


Fig.12.

Ogni stato quantistico è rappresentato da un vettore unitario $\vec{v}$ in uno spazio unitario, che potrà essere reale, complesso o quaternionico, ma che per semplicità espositiva indicheremo col simbolo dello spazio complesso ***Z***. Ogni grandezza osservabile ***A*** è rappresentata da un insieme di numeri reali a_1, a_2,..., a_N, che sono i possibili valori osservabili, e da un corrispondente insieme di vettori unitari a due a due ortogonali, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_N$, che rappresentano rispettivamente gli stati fisici in cui si trova il sistema immediatamente dopo che è stato osservato l'uno o l'altro dei valori a_1, a_2,..., a_N.

Poiché $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_N$ costituiscono i versori di un sistema di riferimento ortogonale completo dello spazio ***Z***, ogni altro vettore di questo spazio potrà scriversi nella forma $\vec{v} = z_1\vec{v}_1 + z_2\vec{v}_2 + \ldots + z_N\vec{v}_N$, dove

$z_1, z_2, ..., z_N$, sono le componenti del vettore rispetto al sistema di riferimento definito dai versori unitari $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_N$. L'interpretazione quantistica del processo di misura avviene in questo modo. La conoscenza dello stato $\vec{v}$ immediatamente prima della sua osservazione mediante il processo di misura A ci permette di fare delle predizioni probabilistiche circa l'esito della misura. Precisamente essa ci permette di stabilire che la probabilità di osservare il valore a_i è $p_i = |z_i|^2$, cioè il modulo quadrato della componente z_i del vettore $\vec{v}$ riferito al sistema di assi ortogonali individuata da $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_N$.

Immediatamente dopo la misura, se il valore osservato è esattamente a_i, lo stato del sistema si trova con certezza nello stato rappresentato dal vettore unitario $\vec{v}_i$. In tal modo l'incertezza dei valori osservabili possibili immediatamente prima della misura è collassata attraverso il processo di misura nella certezza di avere osservato precisamente uno dei valori possibili. Corrispondentemente, il vettore che rappresenta lo stato del sistema immediatamente prima della misura è proiettato sull'asse del versore $\vec{v}_i$ corrispondente al valore osservato.

Si può notare che prima della misura la conoscenza della grandezza A era fornita in modo impreciso come media dei suoi valori possibili $a_1, a_2, ..., a_N$ nello stato $\vec{v}$. Dato che questi valori sono attesi con probabilità $p_1, p_2, ..., p_N$, dove $p_i = |z_i|^2$, il valore medio di A stimato prima della misura è determinato dall'equazione:

$$\langle A \rangle = p_1 a_1 + p_2 a_2 + ... + p_N a_N = |z_1|^2 a_1 + |z_2|^2 a_2 + ... + |z_N|^2 a_N,$$

dalla quale prenderemo le mosse per cercare di determinare in quale degli spazi R, Z, Q sia più conveniente e naturale definire gli stati quantistici.

13. Forma di una grandezza osservabile rispetto ad una base arbitraria

Consideriamo ora una trasformazione di stato T. Sotto l'azione di T le componenti z_i del vettore di stato $\vec{v}$ si modificano nel seguente modo:

$$T: \quad z_i \to z_i' = T_i^j z_j;$$

dove, come si usa, è sottintesa la somma sugli indici ripetuti. Indicheremo la trasformazione inversa con l'espressione

$$T^{-1}: \; z_i' \to z_i = (T^{-1})_i^j z_j';$$

D'altronde la trasformazione del vettore complesso coniugato $\vec{v}^\dagger$ e la sua inversa subiscono rispettivamente la trasformazione trasposta e complessa coniugata $T^\dagger$ e l'inversa $T^{\dagger -1}$:

$$T^\dagger: \quad z^\dagger{}_i \to z_i^{\dagger\prime} = T_i^{\dagger j} z^\dagger{}_j; \qquad \left(T^\dagger\right)^{-1}: \quad z_i^{\dagger\prime} \to z^\dagger{}_i = \left(T^{\dagger -1}\right)_i^j z_j^{\dagger\prime} \text{ (trasformazione inversa).}$$

La condizione $p_1 + p_2 + \ldots + p_N = 1$ (invarianza del quadrato modulo di $\vec{v}$) impone allora l'uguaglianza $T^\dagger = T^{-1}$. Nei casi reale, complesso e quaternionico avremo rispettivamente:

$$T^\dagger = T^{-1} = \tilde{T} \quad \text{(trasposta, caso reale);}$$
$$T^\dagger = T^{-1} = \tilde{T}^* \text{ (trasposta coniugata, casi complesso e quaternionico);}$$

dove $\sim$ indica il simbolo di trasposizione e * indica quello di coniugazione complessa. L'espressione del valore medio di A nello spazio degli stati trasformati da T assume la forma:

$$\langle A \rangle = |z_1|^2 a_1 + |z_2|^2 a_2 + ... + |z_N|^2 a_N = z_k'^\dagger T_i^k a_i T_i^{\dagger j} z_j' = z_k'^\dagger B^{kj} z_j'$$

Questa equazione indica che, rispetto ad una base arbitraria di stati (stati unitari a due a due ortogonali), ogni grandezza fisica è rappresentata da una matrice di forma generale: $B = TAT^{\dagger} = B^{\dagger}$, dove A è una matrice diagonale reale arbitraria e T una matrice arbitraria soddisfacente all'equazione $T^{\dagger} = T^{-1}$, cioè una matrice unitaria arbitraria. In corrispondenza dei tre campi numerici sono allora possibili i casi illustrati nei seguenti paragrafi.

14. Caso reale: $T^{-1} = T^{\dagger} = \tilde{T}$ *(rotazioni euclidee)*

L'inversa della trasformazione T coincide con la trasposta $\tilde{T}$. Perciò T è una rotazione dello spazio euclideo reale a N dimensioni. Le grandezze osservabili sono rappresentate dalle matrici di forma generale

$$B = TA\tilde{T} = \tilde{B},$$

dove A è una matrice diagonale reale. Esse sono le matrici reali simmetriche di dimensione N e hanno pertanto molteplicità (numero di matrici linearmente indipendenti) pari a

$$M_O = N + N(N-1)/2 = N(N+1)/2.$$

Le proprietà delle matrici G che rappresentano i generatori delle trasformazioni T sono date dalle relazioni:

$$T = e^G; \qquad T^{-1} = \tilde{T} \;\;\Rightarrow\;\; \tilde{G} = -G.$$

Queste sono le matrici reali antisimmetriche e hanno pertanto molteplicità $M_G = N(N-1)/2$. Si noti la disuguaglianza $M_G < M_O$.

Consideriamo un sistema formato da due parti ***A*** e ***B***, con spazi degli stati di dimensioni rispettive $N_A > 1$ e $N_B > 1$. Le funzioni delle osservabili delle parti della forma:

$$C = \sum_{ij} c_{ij} A_i \otimes B_j,$$

dove $A \otimes B$ indica il prodotto diretto delle matrici A e B, rappresentano un insieme di osservabili del sistema composto. Infatti, dato che i coefficienti c_{ij} sono reali, abbiamo

$$\tilde{C} = \sum_{ij} c_{ij} \tilde{A}_i \otimes \tilde{B}_j = \sum_{ij} c_{ij} A_i \otimes B_j = C.$$

La molteplicità di queste *osservabili composte* è

$$N^C_{AB} = N_A N_B (N_A+1)(N_B+1)/4,$$

mentre quella delle osservabili dello *spazio composto* $N_A N_B$-dimensionale è

$$N_{AB} = N_A N_B (N_A N_B + 1)/2 > N^C_{AB}.$$

Ciò implica che esistono osservabili del sistema composto che non possono esprimersi come funzioni delle osservabili delle parti. *Chiaramente, questo esclude la possibilità di rappresentare un sistema fisico come una combinazione di parti.*

15. Caso complesso: $T^{-1} = T^{\dagger} = \tilde{T}^{*}$ *(trasformazioni unitarie nel campo complesso)*

L'inversa della trasformazione T coincide con la trasposta complessa coniugata $\tilde{T}^{*} \equiv T^{\dagger}$. Perciò T è una trasformazione unitaria dello spazio complesso N-dimensionale. Le grandezze osservabili sono rappresentate dalle matrici di forma generale

$$B = TAT^{\dagger} = B^{\dagger},$$

con A è diagonale reale. Esse sono le matrici *hermitiane* e hanno pertanto molteplicità

$$M_O = N + 2N(N-1)/2 = N^2.$$

Le proprietà delle matrici G che rappresentano i generatori delle trasformazioni si ottengono dalle relazioni:

$$T = e^G; \qquad T^{-1} = T^{\dagger} \;\; \Rightarrow \;\; \tilde{G}^* \equiv G^{\dagger} = -G.$$

Queste sono le matrici *antihermitiane*, vale a dire le matrici hermitane moltiplicate per l'unità immaginaria. Esse hanno pertanto molteplicità $M_G = N^2$. Si noti l'uguaglianza $M_G = M_O$.

Consideriamo un sistema formato da due parti ***A*** e ***B*** con spazi degli stati di dimensioni rispettive $N_A > 1$ e $N_B > 1$. Le osservabili del sistema composto che si possono esprimere come funzioni delle osservabili delle parti hanno la forma:

$$(*) \qquad\qquad C = \sum_{ij} c_{ij} A_i \otimes B_j .$$

La condizione $C^{\dagger} = C$ impone che i coefficienti c_{ij} siano reali. Si può dimostrare che $C = 0$ implica che o le A_i o le B_j sono linearmente dipendenti nei loro rispettivi spazi. Pertanto la molteplicità di queste *osservabili composte* è $N^C{}_{AB} = N^2{}_A N^2{}_B$.

D'altronde, la molteplicità delle osservabili dello spazio composto $N_A N_B$-dimensionale è

$$N_{AB} = (N_A N_B)^2 = N^C{}_{AB}.$$

Ciò significa che *tutte le osservabili del sistema composto sono funzioni delle osservabili delle parti*.

Dato un numero sufficiente di osservabili C e le A_i, le (*) possono essere risolte rispetto a B_j. Ciò significa che conoscendo un numero sufficiente di proprietà di un sistema composto (uno strumento di misura interagente con un sistema da osservare) e osservando quelle di una sua parte (lo strumento di misura) è possibile risalire senza ambiguità alle proprietà dell'altra parte (del sistema da osservare).

Nel caso complesso è possibile rappresentare i sistemi come entità composte di parti (una delle quali può fungere da apparato d'osservazione e l'altra da sistema osservato).

16. Caso dei quaternioni: $T^{-1} = T^{\dagger} = \tilde{T}^*$ *(trasformazioni unitarie nel campo dei quaternioni)*

Le grandezze osservabili sono rappresentate dalle matrici di forma $B = TAT^{\dagger} = B^{\dagger}$. Dove il simbolo † indica la coniugazione quaternionica e A è diagonale reale. Esse sono le matrici hermitiane quaternioniche del tipo:

$$B = B_0 + \hat{i}B_1 + \hat{j}B_2 + \hat{k}B_3,$$

con B_0 reale simmetrica e B_1, B_2, B_3 reali antisimmetriche. Esse hanno pertanto molteplicità

$$M_O = N(N+1)/2 + 3N(N-1)/2 = 4N^2 - N.$$

Le proprietà delle matrici che rappresentano i generatori G delle trasformazioni si ottengono dalle relazioni:

$$T = e^G; \qquad T^{-1} = \tilde{T}^* \;\; \Rightarrow \;\; \tilde{G}^* = -G;$$

Queste sono le matrici antihermitiane quaternioniche e hanno pertanto molteplicità

$$M_G = 3N + 4N(N-1)/2 = 4N^2 + 2N \; > \; M_O.$$

Consideriamo ora un sistema formato di due parti ***A*** e ***B***, con spazi degli stati di dimensioni rispettive $N_A > 1$ e $N_B > 1$. La molteplicità delle osservabili dello spazio composto N_AN_B-dimensionale è $N_{AB} = 4(N_AN_B)^2 - N_AN_B$.

Le osservabili del sistema composto che si possono esprimere come funzioni delle osservabili delle parti dovrebbero avere la forma:

$$C = \sum_{ij} c_{ij} A_i \otimes B_j .$$

Tuttavia in questo caso, a causa della non commutatività dei quaternioni, la condizione $\tilde{C}^* = C$ non può essere soddisfatta per tutte le A_i e B_j hermitiane quaternioniche. Poniamo ad esempio

$$C = c(A_0 + \hat{i}A_1) \otimes (B_0 + \hat{j}B_2) = c(A_0 \otimes B_0 + \hat{i}A_1 \otimes B_0 + \hat{j}A_0 \otimes B_2 + \hat{k}A_1 \otimes B_2),$$

dove A_0 e B_0 sono simmetriche e A_1, B_2 antisimmetriche. La coniugata quaternionica è dunque:

$$\begin{aligned}\tilde{C}^* &= \tilde{c}^*(\tilde{A}_0 \otimes \tilde{B}_0 - \hat{i}\tilde{A}_1 \otimes \tilde{B}_0 - \hat{j}\tilde{A}_0 \otimes \tilde{B}_2 - \hat{k}\tilde{A}_1 \otimes \tilde{B}_2) = \\ &\tilde{c}^*(A_0 \otimes B_0 + \hat{i}A_1 \otimes B_0 + \hat{j}A_0 \otimes B_2 - \hat{k}A_1 \otimes B_2).\end{aligned}$$

E' evidente che l'unico modo di soddisfare all'equazione $\tilde{C}^* = C$ è di porre $c = 0$. Ciò significa che *due osservabili di due sistemi indipendenti possono non formare una osservabile*. Per analoghe ragioni abbiamo:

$$\left(e^{\hat{i}A} \otimes e^{\hat{j}B}\right)^\dagger \neq \left(e^{\hat{i}A}\right)^\dagger \otimes \left(e^{\hat{j}B}\right)^\dagger .$$

Ciò significa che nel campo dei quaternioni il prodotto diretto di due trasformazioni unitarie non è in generale una trasformazione unitaria. In termini fisici: trasformando gli stati delle parti non si ottiene, in generale, una trasformazione di stato del sistema composto (violazione del principio d'indipendenza delle parti). Ciò spoglia di significato fisico la nozione di indipendenza delle parti.

TAVOLE SINOTTICHE

Sistemi con spazi di dimensione N, osservabili di forma $A = A^\dagger$ e trasformazioni $T = e^G$ di forma $T^\dagger = T^{1}$ $(G^\dagger = -G)$.

Spazio	Osservabili, N^o	Trasformazioni e^G	Generatori G, N^o
reale (R^N)	matrici R-simmetriche, $N(N+1)/2$	rotazioni in R^N	antisimmetrici, $N(N-1)/2$
complesso (C^N)	matrici C-hermitiane, N^2	unitarie in C^N	C-antihermitiani, N^2
quaternionico (Q^N)	matrici Q-hermitiane, $4N^2 - N$	unitarie in Q^N	Q-antihermitiani, $4N^2 + 2N$

Sistemi composti di parti rappresentate in spazi di dimensioni rispettive $N > 1$, $M > 1$ e con osservabili A_i, B_j.

Spazio	Numero di osservabili del sistema composto	Osservabili composte e ... loro numero
R^{NM} C^{NM} Q^{NM}	$N_C = NM(NM + 1)/2$ $N_C = (NM)^2$ $N_C = 4(NM)^2 - NM$	$C = \sum_{ij} c_{ij} A_i \otimes B_j$ $\quad NM(N+1)(M+1)/4 < N_C$ $C = \sum_{ij} c_{ij} A_i \otimes B_j$ (c_{ij}reali) $\quad (NM)^2 = N_C$ generalmente prive di significato fisico

17. Rilevanza del risultato

Lo scopo di questo articolo era di dimostrare che alla base della fisica dei quanti vi è una logica del "possibile" profondamente diversa da quella della fisica classica. Mentre i possibili della logica classica sono rappresentati dai punti di un insieme, quelli della logica quantistica sono rappresentati dai vettori di uno spazio multidimensionale dotato di prodotto scalare. Nell'approccio puramente logico alla meccanica quantistica rimane tuttavia indeterminato il campo numerico dell'aritmetica vettoriale. La scelta del campo complesso, piuttosto di quello reale o di quello quaternionico, è giustifica a posteriori su base sperimentale per spiegare il comportamento "oscillatorio" e "ondulatorio" degli stati fisici. Questo comportamento è attribuito, infatti, alle rotazioni di fase dei numeri complessi che rappresentano le componenti dei vettori di stato durante le loro evoluzioni temporali.

In questo articolo ho dimostrato che la scelta del campo numerico può essere arguita a priori: *la scelta dei vettori complessi è imposta dalla condizione che i sistemi fisici siano generalmente decomponibili in parti e che le proprietà dell'intero sistema siano funzioni di quelle delle parti*. Ciò dipende dal fatto che la molteplicità delle grandezze osservabili di un sistema composto è uguale a quella complessiva delle grandezze osservabili delle parti solo se le grandezze sono rappresentate da matrici hermitiane definite nel campo complesso. Ciò si traduce immediatamente nella condizione che gli stati del sistema siano rappresentati da vettori di uno spazio hilbertiano complesso.

Una conseguenza importante delle rappresentazioni vettoriali complesse riguarda la possibilità di determinare la struttura di un sistema quantistico in modo puramente operazionale. Solo nello spazio hilbertiano complesso è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli operatori che rappresentano le grandezze osservabili e quelli che rappresentano le trasformazioni fisiche. In questo modo, ogni grandezza osservabile può essere determinata anche come generatore di un'operazione di trasformazione degli stati e viceversa (dualismo osservare-operare).

Al limite classico, che si ottiene facendo tendere a zero la costante di Planck, lo spazio hilbertiano complesso assume la struttura dello spazio delle fasi della meccanica classica (spazio simplettico) e il dualismo quantistico osservare-operare si traduce nella partizione delle grandezza fisiche in coppie coniugate. Tali sono ad esempio posizione e quantità di moto, angolo di rotazione attorno ad un asse e componente del momento della quantità di moto rispetto a tale asse ecc.

Nel puro ambito della fisica classica questa peculiare struttura dello spazio degli stati trova la sua unica spiegazione nel fatto che leggi della fisica sono deducibili dal principio variazionale di azione stazionaria. Ma perché mai questo principio debba valere non trova, in tale stretto ambito, alcuna spiegazione logica. Ora invece ne conosciamo la ragione: *la struttura della fisica classica non è semplicemente quella impartita dalla logica classica, ma quella impartita dal limite classico della logica quantistica dei sistemi decomponibili in parti*.

Padova, 20/9/2007; ultima revisione 4/9/2009.

I contenuti di questo articolo, in particolare la dimostrazione che lo spazio hilbertiano complesso è l'unica interpretazione fisica possibile della logica quantistica, sono originali dell'autore. In caso di "pescaggio" si prega di citare questo articolo e l'autore.

Bibliografia

1. Araki, H., On a Characterization of the State Space of Quantum Mechanics, *Comm. Math. Phys.* 75:1-24, (1980).
2. *Enciclopedia Filosofic*a. I edizione in 5 volumi (1958) e III edizione in 12 volumi (2006). Fondazione Centro Studi Filosofici di Gallarate..
3. Birkhoff, G. and von Neumann, J., The Logic of Quantum Mechanics, *Annals of Mathematics*, 27:823-843 (1936).
4. Lucrezio, T. C. *La natura delle cose*, (~53 a.C.). Edizioni BUR Rizzoli (1997).
5. von Neumann, J. (1932) *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press.
6. Piron, C., Axiomatique Quantique. *Helv. Phys. Acta* 37:439-468 (1964).
7. Russo, L. (1997) *La rivoluzione dimenticata*. Edizioni Feltrinelli.
8. Stone, M.H. (1936) The Theory of Representations of Boolean Algebras. *Transactions of the Americ. Math. Soc*. 40:37-111.