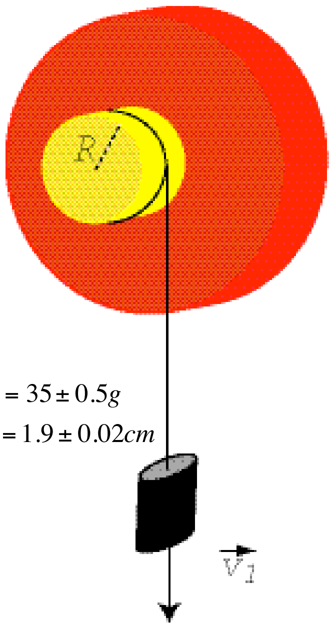
Misura del momento d’inerzia di un volano



$m = 35 \pm 0.5g$

$R = 1.9 \pm 0.02cm$

Si suppone che il momento degli attriti del volano sia costante in modulo, dipenda cioè dal verso della velocità angolare, ma non dalla sua intensità. Questa ipotesi è verificata se il moto risulta in modo sperimentale uniformemente accelerato.
Si può analizzare il moto misurandolo in due fasi successive (una di salita e una di discesa del pesetto). Invertendo l’ordine delle fasi si ottengono equazioni del moto diverse. Consideriamo il caso in cui avvenga prima la salita e poi la discesa. In questo caso il moto del volano si inverte quando la massa appesa, raggiunge la sua massima quota. Il volano passa quindi da un moto orario a un moto antiorario (salita e discesa del pesetto) che presentano momenti d’attrito opposti in verso, ma di uguale intensità. In questi due tratti del moto ci sono accelerazioni e tensioni del filo differenti.
Le equazioni del moto del volano in discesa ed in salita sono

$$\textit{salita : moto orario} \qquad \begin{cases} T_s R + M_{ATT} = I\alpha_s = I\dfrac{a_s}{R} \\ mg - T_s = ma_s \end{cases}$$

$$\textit{discesa : moto antiorario} \qquad \begin{cases} T_d R - M_{ATT} = I\alpha_d = I\dfrac{a_d}{R} \\ mg - T_d = ma_d \end{cases}$$

da cui risolvendo il sistema il momento d’inerzia del volano è

$$I = \frac{2mgR^2}{a_d + a_s} - mR^2 \approx \frac{2mgR^2}{a_d + a_s}$$

e l’errore sul momento d’inerzia è

$$\sigma_I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial a_d}\sigma_{a_d}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial a_s}\sigma_{a_s}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial a_m}\sigma_{a_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial a_R}\sigma_{a_R}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{2mgR^2}{(a_d + a_s)^2}\right]^2 \sigma_{a_d}^2 + \left[\frac{2mgR^2}{(a_d + a_s)^2}\right]^2 \sigma_{a_s}^2 + \left(\frac{2gR^2}{a_d + a_s}\sigma_m\right)^2 + \left(\frac{4mgR}{a_d + a_s}\sigma_R\right)^2}$$

$$= \frac{2mgR^2}{(a_d + a_s)}\sqrt{\frac{\sigma_{a_d}^2 + \sigma_{a_s}^2}{(a_d + a_s)^2} + \frac{\sigma_m^2}{m^2} + \frac{4\sigma_R^2}{R^2}} = I\sqrt{\frac{\sigma_{a_d}^2 + \sigma_{a_s}^2}{(a_d + a_s)^2} + \frac{\sigma_m^2}{m^2} + \frac{4\sigma_R^2}{R^2}}$$

Il momento d’attrito utilizzando la prima equazione invece è

$$M_{ATT} = \left(I + mR^2\right)\frac{a_s}{R} - mgR \approx \frac{I}{R}a_s - mgR$$

con errore

$$\sigma_{M_{ATT}} = \sqrt{\left(\frac{\partial M_{ATT}}{\partial a_s}\sigma_{a_s}\right)^2 + \left(\frac{\partial M_{ATT}}{\partial I}\sigma_I\right)^2 + \left(\frac{\partial M_{ATT}}{\partial m}\sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\partial M_{ATT}}{\partial R}\sigma_R\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{I^2}{R^2}\sigma_{a_s}^2 + \frac{a_s^2}{R^2}\sigma_I^2 + g^2R^2\sigma_m^2 + \left(\frac{I^2a_s^2}{R^4} + m^2g^2\right)\sigma_R^2}$$

Le equazioni del moto del volano nel caso si analizzino prima la discesa e poi la salita (per cui la velocità angolare e il momento d’attrito non cambiano direzione, ma si inverte il momento della forza peso) sono

$$\begin{cases} mgR - M_{ATT} = \left(I + mR^2\right)\alpha_d = \left(I + mR^2\right)\dfrac{a_d}{R} & \textit{discesa} \\ -mgR - M_{ATT} = \left(I + mR^2\right)\alpha_s = -\left(I + mR^2\right)\dfrac{a_s}{R} & \textit{salita} \end{cases}$$

fornendo esattamente lo stesso risultato. In questo caso nell’istante in cui il pesetto inverte la direzione di moto, si esercita sull’asse un piccolo impulso che può causare una oscillazione anche importante.