Fisica Teorica (Parte B): Prova scritta di esonero del 27/1/2014

Salvo diverso avviso, si possono usare risultati discussi a lezione senza dimostrarli. Le risposte ai quesiti devono essere però giustificate, riportando i passaggi essenziali della loro derivazione.

1.

Si consideri l'oscillatore armonico quantistico unidimensionale, di Hamiltoniano imperturbato

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\, \omega_0^2\, Q^2 \,,$$

soggetto ad una perturbazione dipendente dal tempo che ne modifica la frequenza:

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_0 & t < 0 \\ \omega_0 + \delta\omega & 0 < t < T \\ \omega_0 & T < t \end{cases} \,.$$

(a) Dopo aver decomposto l'Hamiltoniano valido per $0 < t < T$ come $H(t) = H_0 + V(t)$, si esprima la perturbazione $V(t)$ in termini di m, ω_0, $\delta\omega$ e degli operatori di creazione e distruzione associati ad H_0, ricordando che $Q = \sqrt{\hbar/(2m\omega_0)}\,(a + a^\dagger)$ e $P = -i\,\sqrt{(m\hbar\omega_0)/2}\,(a - a^\dagger)$.

(b) Se al tempo $t_0 < 0$ il sistema si trova nello stato fondamentale $|0\rangle$ di H_0, qual è la probabilità $P_n(t_1)$ di misurare l'energia $E_n = (n + 1/2)\,\hbar\omega_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ al tempo $t_1 > T$, al primo ordine non banale nella teoria delle perturbazioni in $V(t)$? Si ricordi che $|n\rangle = [\,(a^\dagger)^n/\sqrt{n!}\,]\,|0\rangle$.

2.

Si consideri un sistema quantistico unidimensionale con Hamiltoniano $H = P^2/(2m) + V(X)$. Si scriva, derivandola esplicitamente dall'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per l'autofunzione $\psi(x)$ associata all'autovalore E dell'energia, l'*equazione di Airy*, che si utilizza per approssimare $\psi(x)$ nell'intorno del punto di transizione $x = 0$, in cui $V(0) = E$ e $V'(0) > 0$. Si descriva l'approssimazione utilizzata e si ponga l'equazione in forma standard, definendo variabili e parametri. *Non si richiede* di commentare sulle soluzioni né sull'approssimazione WKB.

3.

Sia $\mathcal{T}$ l'operatore che realizza la trasformazione di inversione temporale nello spazio di Hilbert di una particella quantistica con analogo classico.

(a) Come devono trasformare gli operatori posizione $\vec{X}$ ed impulso $\vec{P}$ per riprodurre le leggi di trasformazione delle corrispondenti quantità classiche? La risposta va adeguatamente motivata sulla base di considerazioni a livello classico.

(b) Perché in tal caso $\mathcal{T}$ non può essere un operatore unitario?

(... continua alla pagina seguente ...)

4.

Si considerino i potenziali vettori, associati ad un monopolo magnetico di carica magnetica q_m:

$$\vec{A}_I = \frac{q_m\,(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\,\vec{u}_\varphi \qquad \text{e} \qquad \vec{A}_{II} = \frac{-q_m\,(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}\,\vec{u}_\varphi$$

dove $r > 0$, (r, θ, φ) sono coordinate polari sferiche e $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ i versori ad esse associati.

(a) Per che valori θ_I e θ_{II} dell'angolo polare θ i potenziali A_I e A_{II} sono rispettivamente singolari, nel senso che non possono essere definiti nemmeno per continuità? Basta la risposta.

(b) Escludendo i valori singolari di θ, si scriva una funzione $\Lambda(r, \theta, \varphi)$, definita per $\theta_I \neq \theta \neq \theta_{II}$, che consenta di collegare i due potenziali vettori mediante la trasformazione di gauge

$$\vec{A}_{II} - \vec{A}_I = \vec{\nabla}\Lambda$$

ricordando che in coordinate polari

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r\,\frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{u}_\varphi\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

(c) Ricordato che sotto la trasformazione di gauge descritta dalla funzione $\Lambda(r, \theta, \varphi)$ la funzione d'onda di una particella di carica elettrica q trasforma come $\psi' = e^{iq\Lambda/(\hbar c)}\,\psi$, che condizione deve valere perché le funzioni d'onda ψ_I e ψ_{II} siano entrambe ad un solo valore rispetto alla posizione nello spazio, per $r > 0$ e $\theta_I \neq \theta \neq \theta_{II}$?

5.

Siano

$$\psi_p^{(+)}(x) = u(p)\,e^{-ip\cdot x} \qquad \text{e} \qquad \psi_q^{(+)}(x) = u(q)\,e^{-iq\cdot x}$$

due soluzioni ad energia positiva dell'equazione di Dirac libera per il medesimo valore m della massa, in unità naturali $\hbar = c = 1$.

(a) Si scriva quanto valgono p^0 e q^0 nei quadrivettori $p^\mu \equiv (p^0, \vec{p})$ e $q^\mu \equiv (q^0, \vec{q})$. Si scriva inoltre quanto valgono $\not{p}\,u(p)$, $\overline{u}(p)\,\not{p}$, $\not{q}\,u(q)$, $\overline{u}(q)\,\not{q}$, semplificando il risultato in modo tale che non contenga più $\not{p}$ e $\not{q}$. Bastano le risposte.

(b) Posto $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)\,[\gamma^\mu\,,\,\gamma^\nu]$, si dimostri che:

$$i\,\overline{u}(q)\,\sigma^{\mu\nu}\,(q-p)_\nu\,u(p) = C\;\overline{u}(q)\,(q+p)^\mu\,u(p) + D\;m\,\overline{u}(q)\,\gamma^\mu\,u(p)\,,$$

calcolando il valore dei coefficienti numerici C e D. Vanno riportati i passaggi della derivazione.

Soluzioni

1.

(a) Per $0 < t < T$:

$$H(t) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\, (\omega_0 + \delta\omega)^2\, Q^2 = H_0 + m\, \left(\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right)\, \delta\omega\, Q^2 \qquad \Rightarrow$$

$$V(t) = m\, \left(\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right)\, \delta\omega\, Q^2 = \frac{\hbar}{2\omega_0}\, \left(\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right)\, \delta\omega\, (a + a^\dagger)^2 = \frac{\hbar}{2}\, \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)\, \delta\omega\, (a + a^\dagger)^2$$

(b) Applicando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo per $n \neq 0$ ed osservando che

$$\omega_{n0} = \frac{E_n - E_0}{\hbar} = n\, \omega_0$$

e, per $0 < t < T$

$$V_{n0}(t) = \langle n|V(t)|0\rangle = \frac{\hbar}{2}\, \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)\, \delta\omega\, \langle n|(a + a^\dagger)^2|0\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\, \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)\, \delta\omega\, \delta_{n2}$$

mentre per $t < 0$ e per $t > T$

$$V_{n0}(t) = \langle n|V(t)|0\rangle = 0\,,$$

potremo scrivere:

$$c_n(t_1) = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1} dt\, e^{i\,\omega_{n0}\,t}\, V_{n0}(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\, \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)\, \delta\omega\, \delta_{n2}\int_0^T dt\, e^{i\,n\,\omega_0\,t}$$

Ma

$$\delta_{n2}\int_0^T dt\, e^{i\,n\,\omega_0\,t} = \delta_{n2}\int_0^T dt\, e^{i\,2\,\omega_0\,t} = -\frac{i\,\delta_{n2}}{2\omega_0}\, \left(e^{2\,i\,\omega_0\,T} - 1\right) = -\frac{i\,\delta_{n2}}{2\omega_0}\, e^{i\,\omega_0\,T}\, \left(e^{i\,\omega_0\,T} - e^{-i\,\omega_0\,T}\right)$$

da cui:

$$c_n(t_1) = -\frac{\delta_{n2}}{2\sqrt{2}}\, \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)\, \frac{\delta\omega}{\omega_0}\, e^{i\,\omega_0\,T}\, \left(e^{i\,\omega_0\,T} - e^{-i\,\omega_0\,T}\right) = -i\,\frac{\delta_{n2}}{\sqrt{2}}\, \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)\, \frac{\delta\omega}{\omega_0}\, e^{i\,\omega_0\,T}\, \sin(\omega_0\,T)$$

ed infine

$$P_n(t_1) = |c_n(t_1)|^2 = \frac{\delta_{n2}}{2}\, \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)^2\, \left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)^2\, \sin^2(\omega_0\,T)$$

2.

L'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per l'autofunzione $\psi(x)$ associata all'autovalore E dell'energia si scrive, in una dimensione spaziale :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\,\psi = E\,\psi$$

Nelle ipotesi fatte, e sotto opportune condizioni di regolarità, è possibile approssimare $V(x)$ nell'intorno di $x = 0$ con una funzione lineare:

$$V(x) \simeq E + V'(0)\,x$$

L'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo diventa allora:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V'(0)\,x\,\psi = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2mV'(0)}{\hbar^2}\,x\,\psi$$

Posto

$$\alpha^3 = \frac{2mV'(0)}{\hbar^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = \frac{[2mV'(0)]^{1/3}}{\hbar^{2/3}}$$

e definita la variabile $z = \alpha\,x$, avremo

$$x = \frac{z}{\alpha} \qquad \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dz}\frac{dz}{dx} = \alpha\,\frac{d\psi}{dz} \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2} = \alpha\,\frac{d^2\psi}{dz^2}\frac{dz}{dx} = \alpha^2\,\frac{d^2\psi}{dz^2}$$

dunque

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = z\,\psi$$

che è la forma standard dell'equazione di Airy.

3.

(a) L'azione dell'inversione temporale sulle coordinate spazio-temporali classiche è $\vec{x}\,' = \vec{x}$, $t\,' = -t$, dunque, tenuto conto che $\vec{p} = m\vec{v} = m(d\vec{x})/(dt)$, deve anche essere $\vec{p}\,' = -\vec{p}$. Di conseguenza, per riprodurre le leggi di trasformazione classiche dovremo avere:

$$\vec{X}\,' \equiv \mathcal{T}\vec{X}\mathcal{T}^{-1} = \vec{X} \qquad \qquad \vec{P}\,' \equiv \mathcal{T}\vec{P}\mathcal{T}^{-1} = -\vec{P}$$

(b) Richiedere che $X_i' \equiv \mathcal{T}X_i\mathcal{T}^{-1} = X_i$ e $P_i' \equiv \mathcal{T}P_i\mathcal{T}^{-1} = -P_i$ sia realizzato da un operatore unitario $\mathcal{T}$ è incompatibile con le relazioni di commutazione canoniche. In tal caso avremmo infatti da un lato che

$$[X_i', P_j'] = [\mathcal{T}X_i\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}P_j\mathcal{T}^{-1}] = [X_i, -P_j] = -[X_i, P_j] = -i\hbar\delta_{ij}\,,$$

dall'altro che

$$[X_i', P_j'] = [\mathcal{T}X_i\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}P_j\mathcal{T}^{-1}] = \mathcal{T}X_iP_j\mathcal{T}^{-1} - \mathcal{T}P_jX_i\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}[X_i, P_j]\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}(i\hbar\,\delta_{ij})\mathcal{T}^{-1} = i\hbar\,\delta_{ij}\,.$$

4.

(a) A_I è singolare per $\theta = \theta_I = \pi$, A_{II} è singolare per $\theta = \theta_{II} = 0$.

(b)

$$\vec{A}_{II} - \vec{A}_I = -\frac{2q_m}{r\sin\theta}\,\vec{u}_\varphi \quad \& \quad \vec{\nabla}\Lambda = \vec{u}_r\,\frac{\partial\Lambda}{\partial r} + \vec{u}_\theta\,\frac{1}{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta} + \vec{u}_\varphi\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Lambda}{\partial\varphi}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial\theta} = 0 \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial\varphi} = -2\,q_m \qquad \Rightarrow \qquad \Lambda = -2\,q_m\,\varphi$$

a meno di una costante di integrazione arbitraria che non gioca alcun ruolo in quanto segue.

(c)

$$\psi_{II} = e^{\frac{i\,q\,\Lambda}{\hbar c}}\,\psi_I = e^{-i\,\frac{2\,q\,q_m}{\hbar c}\,\varphi}\,\psi_I$$

Poiché punti dello spazio corrispondenti a φ e $\varphi + 2\pi$ coincidono, perché sia ψ_I che ψ_{II} siano univocamente definite deve essere

$$\frac{2\,q\,q_m}{\hbar c} = n \qquad\qquad (n \in \mathbf{Z})$$

5.

(a)

$$p^0 = \omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \qquad\qquad q^0 = \omega_{\vec{q}} = \sqrt{\vec{q}^2 + m^2}$$

$$\not{p}\,u(p) = m\,u(p) \qquad \overline{u}(p)\,\not{p} = m\,\overline{u}(p) \qquad \not{q}\,u(q) = m\,u(q) \qquad \overline{u}(q)\,\not{q} = m\,\overline{u}(q)$$

(b) Ponendo per semplicità $u(p) \equiv u$ e $\overline{u}(q) \equiv \overline{u}$, visto che non c'è rischio di confusione tra le rispettive dipendenze da p e q, e ricordando che $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
i\,\overline{u}\,\sigma^{\mu\nu}\,(q-p)_\nu\,u &= -\frac{1}{2}\,\overline{u}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\,(q-p)_\nu\,u = \\
&= -\frac{1}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,q_\nu\,u + \frac{1}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,p_\nu\,u + \frac{1}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\nu\,\gamma^\mu\,q_\nu\,u - \frac{1}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\nu\,\gamma^\mu\,p_\nu\,u = \\
&= -\overline{u}\,\eta^{\mu\nu}\,q_\nu\,u + \frac{1}{2}\,\overline{u}\,\not{q}\gamma^\mu\,u + \frac{1}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\mu\,\not{p}\,u + \frac{1}{2}\,\overline{u}\,\not{q}\gamma^\mu\,u - \overline{u}\,\eta^{\mu\nu}\,p_\nu\,u + \frac{1}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\mu\,\not{p}\,u = \\
&= -\overline{u}\,q^\mu\,u + \frac{m}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\mu\,u + \frac{m}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\mu\,u + \frac{m}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\mu\,u - \overline{u}\,p^\mu\,u + \frac{m}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\mu\,u = \\
&= -\overline{u}\,(q+p)^\mu\,u + 2\,m\,\overline{u}\,\gamma^\mu\,u
\end{aligned}$$

Dunque, nella notazione del testo:

$$C = -1 \qquad\qquad D = 2$$