Fisica Teorica (Parte B): Prova scritta di esonero del 24/2/2014

Salvo diverso avviso, si possono usare risultati discussi a lezione senza dimostrarli. Le risposte ai quesiti devono essere però giustificate, riportando i passaggi essenziali della loro derivazione.

1.

Si consideri l'oscillatore armonico semplice unidimensionale, di Hamiltoniano quantistico

$$H = \frac{P^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,X^2\,.$$

In visuale di Heisenberg (coincidente con quella di Schrödinger a $t = 0$) si consideri l'operatore:

$$A_H(t) = m\,\omega\,X_H(t)\,\cos\omega t - P_H(t)\,\sin\omega t$$

(a) Quanto vale il commutatore $[X_H(t), P_H(t)]$? Si giustifichi la risposta.
(b) Si possono diagonalizzare simultaneamente $A_H(t)$ e H? Si giustifichi la risposta.
(c) Si calcoli $dA_H(t)/(dt)$, semplificando quanto più possibile il risultato.

2.

Sia W un operatore unitario definito nello spazio di Hilbert associato ad un sistema quantistico conservativo di Hamiltoniano H con spettro discreto. Si indichi con $|E\rangle$ il generico autovettore associato al generico autovalore E di H.

(a) Quale condizione su W e H identifica W come una *simmetria dinamica*? Basta la formula.
(b) Si dimostri che, se W è una simmetria dinamica, W lascia invariante ogni autospazio di H.

3.

Un fascio sottile di particelle di intensità $I = 10^{11}$ particelle/s incide su un'area A, corrispondente alla sezione trasversale del fascio, di un bersaglio sottile con una densità superficiale $\rho = 10^{18}$ atomi/cm^2. Un rivelatore di area $S = \pi$ cm^2, posto ortogonalmente al fascio diffuso nella direzione (θ_0, φ_0) ad una distanza $R = 50$ cm dal bersaglio, conta $\Delta n = 2$ particelle/s.

(a) Si esprima il numero N_a di atomi coinvolti nel processo di diffusione in funzione di A e ρ.
(b) Si calcoli l'angolo solido $\Delta\Omega$ coperto dal rivelatore, esprimendolo numericamente in steradianti.
(c) Si calcoli dai dati la sezione d'urto differenziale $d\sigma/(d\Omega)$ per il processo di diffusione da un singolo atomo, nella direzione (θ_0, φ_0), esprimendone il valore numerico in cm^2/atomo/steradiante.

(... continua alla pagina seguente ...)

4.

Una particella quantistica non-relativistica di massa m è soggetta al potenziale tridimensionale:

$$V = \frac{1}{2}\, m\omega^2 \,(X^2 + Y^2 + Z^2 + \lambda\, X\, Y)\,, \qquad\qquad (0 < m, \omega, \lambda \in \mathbf{R}\,,\ \lambda \ll 1)\,.$$

(a) Considerato il limite imperturbato $\lambda = 0$, si scrivano l'energia $E_1^{(0)}$ e la degenerazione d_1 del primo livello eccitato, ed una base ortonormale per il corrispondente autospazio. Si può utilizzare la notazione adottata a lezione senza spiegarla e bastano le risposte.
(b) Si calcolino i corrispondenti autovalori dell'energia al primo ordine perturbativo in λ.
(c) Si scriva una base ortonormale di autovettori della perturbazione, associandoli ai rispettivi autovalori, in termini della base ortonormale introdotta in precedenza. Basta la risposta.

Alcune formule utili dell'oscillatore armonico semplice unidimensionale:

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^\dagger) \qquad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$[a, a^\dagger] = 1 \qquad a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

5.

Si consideri il campo scalare complesso $\varphi(x)$, descritto in unità naturali dall'azione libera:

$$S_0 = \int d^4x\, \left[(\partial^\mu\varphi)^*(\partial_\mu\varphi) - m^2\,|\varphi|^2\right]\,, \qquad\qquad (0 < m^2 \in \mathbf{R})\,,$$

invariante per le trasformazioni di fase 'globali'

$$\varphi'(x) = e^{i\,\alpha}\,\varphi(x)\,, \qquad\qquad (\alpha \in \mathbf{R}\ \text{costante})\,.$$

(a) Si scrivano, senza derivarle, l'equazione del moto per il campo $\varphi(x)$ e la sua soluzione generale, nelle convenzioni adottate a lezione e specificando in maniera completa la notazione.
(b) Si calcoli la quadricorrente $j^\mu(x)$, associata all'invarianza di cui sopra, per cui $\partial_\mu j^\mu = 0$ lungo le soluzioni delle equazioni del moto. È consentito applicare il teorema di Noether senza dimostrarlo.
(c) Introdotta la nuova derivata $D_\mu\varphi \equiv \partial_\mu\varphi - i\,A_\mu\,\varphi$, dove A_μ è un campo quadrivettoriale reale, si determini la legge di trasformazione di A_μ per trasformazioni di fase, $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \Delta A_\mu(x)$, che rende D_μ una 'derivata covariante' rispetto alle trasformazioni 'locali' in cui la fase $\alpha(x)$ dipende dal punto dello spazio-tempo: $(D_\mu\varphi)' = e^{i\,\alpha}\,(D_\mu\varphi)$. Sono richiesti i passaggi intermedi.
(d) Si derivi l'equazione del moto per il campo $\varphi(x)$ associata all'azione

$$S_1 = \int d^4x\, \left[(D^\mu\varphi)^*(D_\mu\varphi) - m^2\,|\varphi|^2\right]\,,$$

ponendo a primo membro quanto già appare nell'equazione libera ricavata da S_0 e semplificando quanto più possibile l'espressione a secondo membro. Sono richiesti i passaggi essenziali.

Soluzioni

1.

(a)

$$X_H(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\, X_S\, e^{\frac{i}{\hbar}Ht} \qquad P_H(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\, P_S\, e^{\frac{i}{\hbar}Ht} \qquad [X_S, P_S] = i\hbar \qquad \Rightarrow$$

$$[X_H(t), P_H(t)] = \left[e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\, X_S\, e^{\frac{i}{\hbar}Ht}, e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\, P_S\, e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\right] = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\, [X_S, P_S]\, e^{\frac{i}{\hbar}Ht} = i\hbar$$

(b) Ricordando che $H_H = H_S = H$:

$$[A_H(t), H] = \left[m\,\omega\, X_H(t)\,\cos\omega t - P_H(t)\,\sin\omega t, \frac{P_H(t)^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,X_H(t)^2\right] =$$

$$= \frac{\omega}{2}\cos\omega t\;[X_H(t), P_H(t)^2] - \frac{m\omega^2}{2}\sin\omega t\;[P_H(t), X_H(t)^2] =$$

$$= \omega\,\cos\omega t\, i\hbar\, P_H(t) + m\omega^2\,\sin\omega t\, i\hbar\, X_H(t) =$$

$$= i\hbar\omega\,[\cos\omega t\;\, P_H(t) + m\omega\,\sin\omega t\;\, X_H(t)] \neq 0$$

per cui la risposta è no.

(c)

$$i\hbar\,\frac{dA_H(t)}{dt} = [A_H(t), H] + i\hbar\,\frac{\partial A_H(t)}{\partial t}$$

$$i\hbar\,\frac{\partial A_H(t)}{\partial t} = -i\hbar\omega\,[\cos\omega t\;\, P_H(t) + m\omega\,\sin\omega t\;\, X_H(t)] = -[A_H(t), H]$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dA_H(t)}{dt} = 0$$

2.

(a)

$$[W\,,\,H] = 0$$

(b)

$$[W\,,\,H] = 0 \quad \& \quad H\,|E\rangle = E\,|E\rangle \qquad \Rightarrow \qquad H\,(W\,|E\rangle) = W\,(H\,|E\rangle) = E\,(W\,|E\rangle)$$

3.

(a)

$$N_a = \rho\;A$$

(b)

$$\Delta\Omega = \frac{S}{R^2} = \frac{\pi\,\mathrm{cm}^2}{2500\,\mathrm{cm}^2} \simeq 1.26\times10^{-3}\;\text{(sterad)}$$

(c) Approssimando dn e $d\Omega$ con Δn e $\Delta\Omega$, la definizione di sezione d'urto differenziale diventa

$$\Delta n = F_i \, \frac{d\sigma}{d\Omega} \, \Delta\Omega \,,$$

dove F_i è il flusso incidente:

$$F_i = \frac{I}{A} \,.$$

Ricordandosi di normalizzare la sezione d'urto al singolo atomo come richiesto, si ottiene

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\Delta n}{N_a \, F_i \, \Delta\Omega} = \frac{\Delta n}{\rho \, I \, \Delta\Omega} =$$

$$= \frac{2 \text{ part/s}}{10^{18} \text{ atom/cm}^2 \times 10^{11} \text{ part/s} \times (\pi/2500) \text{ sterad}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \times 10^{-25} \text{ cm}^2\text{/atom/sterad} \simeq 1.6 \times 10^{-26} \text{ cm}^2\text{/atom/sterad}$$

4.

(a) L'Hamiltoniano imperturbato H_0 è quello dell'oscillatore armonico semplice isotropo tridimensionale, per cui:

$$E_1^{(0)} = \frac{5}{2}\,\hbar\,\omega \qquad\qquad d_1 = 3 \qquad\qquad \{|1,0,0\rangle, |0,1,0\rangle, |0,0,1\rangle\}$$

(b) Decomponiamo l'Hamiltoniano totale come $H = H_0 + \Delta V$, con

$$\Delta V = \frac{\lambda\, m\omega^2}{2}\, X\, Y = \frac{\lambda\, m\omega^2}{2} \frac{\hbar}{2m\omega}\, (a_1 + a_1^\dagger)\, (a_2 + a_2^\dagger) = \frac{\lambda\,\hbar\omega}{4}\, (a_1 + a_1^\dagger)\, (a_2 + a_2^\dagger)$$

Nella base di cui al punto (a), gli unici elementi di matrice non nulli della perturbazione ΔV sono:

$$\langle 1,0,0|\Delta V|0,1,0\rangle = \frac{\lambda\,\hbar\omega}{4}\, \langle 1,0,0|(a_1 + a_1^\dagger)\, (a_2 + a_2^\dagger)|0,1,0\rangle = \frac{\lambda\,\hbar\omega}{4}\, \langle 1,0,0|a_1^\dagger\, a_2|0,1,0\rangle = \frac{\lambda\,\hbar\omega}{4}$$

$$\langle 0,1,0|\Delta V|1,0,0\rangle = \frac{\lambda\,\hbar\omega}{4}\, \langle 0,1,0|(a_1 + a_1^\dagger)\, (a_2 + a_2^\dagger)|1,0,0\rangle = \frac{\lambda\,\hbar\omega}{4}\, \langle 0,1,0|a_2^\dagger\, a_1|1,0,0\rangle = \frac{\lambda\,\hbar\omega}{4}$$

Posto $\Delta E_1^{(1)} = x$ e $\lambda\,\hbar\omega/4 = A$, dobbiamo determinare gli autovalori della matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Risolvendo l'equazione secolare $x(x^2 - A^2) = 0$ otteniamo $x = -A, 0, +A$, ovvero:

$$\Delta E_1^{(1)} = -\frac{\lambda\,\hbar\omega}{4}\,,\ 0\,,\ +\frac{\lambda\,\hbar\omega}{4} \qquad \Rightarrow \qquad E_1^{(1)} = \left(\frac{5}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)\hbar\omega\,,\ \frac{5}{2}\,\hbar\omega\,,\ \left(\frac{5}{2} + \frac{\lambda}{4}\right)\hbar\omega$$

(c)

$$x = -A: \ \frac{|1,0,0\rangle - |0,1,0\rangle}{\sqrt{2}} \qquad\qquad x = 0: \ |0,0,1\rangle \qquad\qquad x = +A: \ \frac{|1,0,0\rangle + |0,1,0\rangle}{\sqrt{2}}$$

5.

(a) Posto $\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$, con $\eta^{\mu\nu} \equiv diag\,(+1,-1,-1,-1)$:

$$(\Box + m^2)\,\varphi(x) = 0$$

La soluzione generale è:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\vec{k}}}\, \left[a(\vec{k})\, e^{-ik\cdot x} + b^*(\vec{k})\, e^{ik\cdot x}\right]_{k^0=+\omega_{\vec{k}}}$$

dove $\omega_{\vec{k}} = +\sqrt{\vec{k}^{\,2} + m^2}$, $k\cdot x = k^\mu x_\mu = \omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x}$; $a(\vec{k})$ e $b^*(\vec{k})$ sono funzioni complesse di $\vec{k}$.

(b) Passando a trasformazioni infinitesime, $\delta\varphi = i\,\alpha\,\varphi$ e $\delta\varphi^* = -i\,\alpha\,\varphi^*$, per cui, applicando il teorema di Noether e trattando φ e φ^* come indipendenti:

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\frac{\delta\varphi}{\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\frac{\delta\varphi^*}{\alpha} = i\,[\varphi(\partial^\mu\varphi^*) - \varphi^*(\partial^\mu\varphi)]$$

Ogni j^μ che differisca dalla precedente per una costante moltiplicativa non nulla è pure accettabile.

(c)

$$(D_\mu\varphi)' = (\partial_\mu\varphi - iA_\mu\varphi)' = \partial_\mu(e^{i\alpha}\varphi) - i(A_\mu + \Delta A_\mu)e^{i\alpha}\varphi = e^{i\alpha}(\partial_\mu\varphi - iA_\mu\varphi) + i(\partial_\mu\alpha)e^{i\alpha}\varphi - i\Delta A_\mu e^{i\alpha}\varphi =$$

$$= e^{i\alpha}(D_\mu\varphi) + i(\partial_\mu\alpha - \Delta A_\mu)e^{i\alpha}\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \Delta A_\mu = \partial_\mu\alpha \quad \Rightarrow \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)$$

(d) La forma esplicita della densità di Lagrangiana associata a S_1 è:

$$\mathcal{L}_1 = (\partial_\mu\varphi^* + iA_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi - iA^\mu\varphi) - m^2\varphi^*\varphi$$

L'equazione di Eulero-Lagrange per φ [φ^*] si può scrivere:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial\varphi^*} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)} = 0 \qquad\qquad \left[\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial\varphi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = 0\right]$$

Da

$$\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial\varphi^*} = iA_\mu(\partial^\mu\varphi - iA^\mu\varphi) - m^2\varphi \qquad\qquad \left[\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial\varphi} = -iA_\mu(\partial^\mu\varphi^* + iA^\mu\varphi^*) - m^2\varphi^*\right]$$

e

$$\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)} = \partial^\mu\varphi - iA^\mu\varphi \qquad\qquad \left[\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = \partial^\mu\varphi^* + iA^\mu\varphi^*\right]$$

segue allora

$$(\Box + m^2)\,\varphi = i(\partial_\mu A^\mu)\varphi + 2iA^\mu\partial_\mu\varphi + A^\mu A_\mu\varphi = i\partial_\mu(A^\mu\varphi) + iA^\mu\partial_\mu\varphi + A^\mu A_\mu\varphi$$

Alternativamente:

$$(\Box + m^2)\,\varphi^* = -i(\partial_\mu A^\mu)\varphi^* - 2iA^\mu\partial_\mu\varphi^* + A^\mu A_\mu\varphi^* = -i\partial_\mu(A^\mu\varphi^*) - iA^\mu\partial_\mu\varphi^* + A^\mu A_\mu\varphi^*$$