Fisica Teorica (Parte B): Prova scritta di esonero del 16/6/2014

Salvo diverso avviso, si possono usare risultati discussi a lezione senza dimostrarli. Le risposte ai quesiti devono essere però giustificate, riportando i passaggi essenziali della loro derivazione.

1.

Si consideri l'atomo di idrogeno, nelle convenzioni ed approssimazioni in cui l'Hamiltoniano è

$$H = \frac{\vec{P}^{\,2}}{2\,m} - \frac{e^2}{R} \qquad\qquad (R = |\vec{X}|)$$

Si stimi l'energia dello stato fondamentale con il metodo variazionale, utilizzando funzioni d'onda di prova $\psi_\beta(r,\theta,\varphi)$ proporzionali a $e^{-\beta\, r}$ $(0 < \beta \in \mathbf{R})$ ed indipendenti dalle coordinate angolari (θ,φ). Si ricordi che la parte di $\vec{\nabla}^{\,2}$ contenente le derivate rispetto alla coordinata radiale r è

$$\vec{\nabla}^{\,2} \ni \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

e che l'integrazione per parti fornisce $(0 \neq a \in \mathbf{R})$

$$\int dr\ r\ e^{-a\,r} = -(1 + a\,r)\frac{e^{-a\,r}}{a^2} \qquad\qquad \int dr\ r^2\ e^{-a\,r} = -(2 + 2\,a\,r + a^2\,r^2)\frac{e^{-a\,r}}{a^3}$$

2.

Si consideri una particella carica in tre dimensioni con dinamica descritta dall'Hamiltoniano

$$H = \frac{\vec{\Pi}^{\,2}}{2\,m} - \frac{e^2}{|\vec{X}|} \qquad\qquad \vec{\Pi} = \vec{P} - \frac{e}{c}\,\vec{A}(\vec{X})$$

dove le coordinate $\vec{X}$ ed i momenti coniugati $\vec{P}$ soddisfano le relazioni di commutazione canoniche $[X_i\,,\,P_j] = i\,\hbar\,\delta_{ij}$ ed $\vec{A}(\vec{X})$ descrive un campo magnetico costante (ma non uniforme) assegnato.

(a) Si determinino i commutatori $[\Pi_i, X_j]$, $[\Pi_i, P_j]$ e $[\Pi_i, \Pi_j]$.
(b) Si supponga di conoscere un'autofunzione $\psi_n(\vec{x})$ di H, nella rappresentazione delle coordinate, associata ad un certo autovalore E_n. Data la funzione reale $\Lambda(\vec{x})$, si dimostri che la funzione

$$\widetilde{\psi}_n(\vec{x}) = U(\vec{x})\ \psi_n(\vec{x}) \qquad\qquad U(\vec{x}) = e^{-\dfrac{i\,e}{\hbar\,c}\Lambda(\vec{x})}$$

è un'autofunzione, relativa al medesimo autovalore, di un Hamiltoniano $\widetilde{H}$ della stessa forma di H, ma con un diverso $\widetilde{\vec{A}}(\vec{x})$, e si determini $\widetilde{\vec{A}}(\vec{x})$ in funzione di $\vec{A}(\vec{x})$ e di $\Lambda(\vec{x})$.

(. . . continua alla pagina seguente . . .)

3.

Si consideri, in unità naturali $\hbar = c = 1$, la seguente densità di Lagrangiana per il campo $\psi(\vec{x},t)$ ad una sola componente complessa:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2m}(\vec{\nabla}\psi^*) \cdot (\vec{\nabla}\psi) + i\,\psi^*\,\frac{\partial\psi}{\partial t}\,.$$

(a) Si dimostri che la corrispondente equazione del moto coincide con l'equazione di Schrödinger per la funzione d'onda di una particella libera di massa m e priva di spin.
(b) Applicando il teorema di Nöther, si ricavi l'espressione della quadricorrente $j^\mu = (\rho, \vec{\jmath})$ che obbedisce all'equazione di continuità $\partial_\mu\, j^\mu = \partial\rho/(\partial t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath} = 0$, scegliendo la costante moltiplicativa arbitraria in j^μ in modo da poter interpretare $j^0 = \rho$ come densità di probabilità.

Si consideri ora la funzione d'onda associata ad uno stato stazionario di scattering da un potenziale a corto raggio $V(\vec{r})$, ad un angolo di scattering $\theta \neq 0$ e per valori grandi della coordinata radiale r:

$$\psi(\vec{x},t) = e^{-i\,E\,t}\; f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{i\,k\,r}}{r} \qquad (k = \sqrt{2\,m\,E})$$

(c) Ricordando che le espressioni di ρ e $\vec{\jmath}$ restano valide anche in presenza di un potenziale e che

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r\,\frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{u}_\varphi\,\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

si espliciti la corrente di probabilità $\vec{\jmath}$, trascurando termini soppressi da potenze più alte di $(1/r)$ rispetto a quelli dominanti e semplificando quanto più possibile.
(d) Sarebbe stato possibile prevedere la dipendenza asintotica di $\vec{\jmath}$ da r? Come?

4.

(a) Si scrivano l'equazione di Klein-Gordon libera per il campo scalare $\varphi(x)$ e l'equazione di Dirac libera per il campo spinoriale $\psi(x)$, entrambe con parametro di massa m, specificando la metrica di Minkowski e la relazione che definisce l'algebra di Dirac nelle convenzioni del corso.
(b) Si dimostri che, se $\psi(x)$ è soluzione dell'equazione di Dirac libera, allora $\psi(x)$ è anche soluzione dell'equazione di Klein-Gordon libera, giustificando il passaggio chiave della dimostrazione.
(c) Data la soluzione di tipo onda piana dell'equazione di Dirac libera

$$\psi^{(+)}_{\vec{p}}(x) = u(\vec{p})\,e^{-ip\cdot x} \qquad\qquad (p_0 = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2})$$

e ricordato che $\overline{u}(\vec{p}) = u^\dagger(\vec{p})\,\gamma^0$, si derivino le equazioni algebriche cui soddisfano $u(\vec{p})$ e $\overline{u}(\vec{p})$.
(d) Posto $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)\,[\gamma^\mu\,,\,\gamma^\nu]$, ed indicati con $u(\vec{p})$ e $u(\vec{q})$ due spinori del tipo descritto al punto precedente, con la stessa massa m ma diversi impulsi $\vec{p} \neq \vec{q}$, si dimostri che:

$$i\,\overline{u}(q)\,\sigma^{\mu\nu}\,(q+p)_\nu\,u(p) = (A\;q^\mu + B\,p^\mu)\,\overline{u}(q)\,u(p)\,,$$

calcolando il valore dei coefficienti numerici A e B. Vanno riportati i passaggi chiave della derivazione.

Soluzioni

1.

Le funzioni di prova si possono scrivere esplicitamente come

$$\psi_\beta = A\, e^{-\beta\, r}$$

dove A, che non è restrittivo scegliere reale, è determinato dalla condizione di normalizzazione

$$1 = \int d^3\vec{r}\ |\psi_\beta|^2 = A^2 \int d\Omega \int_0^\infty dr\ r^2\ e^{-2\,\beta\, r}$$

Riconosciuto il secondo dei due integrali dati nel testo per $a = 2\beta$, da

$$\int d\Omega = 4\pi \qquad\qquad \int_0^\infty dr\ r^2\ e^{-2\,\beta\, r} = \left[-(2 + 4\,\beta\, r + 4\,\beta^2\, r^2) \frac{e^{-2\,\beta\, r}}{8\,\beta^3} \right]_0^\infty = \frac{1}{4\,\beta^3}$$

segue

$$1 = A^2\ (4\pi)\ \frac{1}{4\,\beta^3} = A^2\ \frac{\pi}{\beta^3} \qquad \Rightarrow \qquad A^2 = \frac{\beta^3}{\pi}$$

Il valore di aspettazione dell'Hamiltoniano sugli stati descritti dalle funzioni d'onda di prova sarà

$$E(\beta) = \int d^3\vec{r}\ \psi_\beta^*\ H\ \psi_\beta = A^2\ (4\pi)\ \int_0^\infty dr\ r^2\ e^{-\beta\, r}\ \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{e^2}{r} \right]\ e^{-\beta\, r} =$$

$$= A^2\ (4\pi)\ \int_0^\infty dr\ r^2\ e^{-\beta\, r}\ \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\beta^2 - \frac{2\,\beta}{r} \right) - \frac{e^2}{r} \right]\ e^{-\beta\, r} =$$

$$= 4\ \beta^3\ \left[\left(-\frac{\hbar^2 \beta^2}{2m} \right) \int_0^\infty dr\ r^2\ e^{-2\,\beta\, r} + \left(\frac{\hbar^2 \beta}{m} - e^2 \right) \int_0^\infty dr\ r\ e^{-2\,\beta\, r} \right]$$

Osservato che il secondo integrale vale, ponendo ancora $a = 2\beta$ in quello dato nel testo,

$$\int_0^\infty dr\ r\ e^{-2\,\beta\, r} = \left[-(1 + 2\,\beta\, r) \frac{e^{-2\,\beta\, r}}{4\,\beta^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{4\,\beta^2}$$

avremo

$$E(\beta) = \left(-\frac{\hbar^2 \beta^2}{2m} \right) + \beta\ \left(\frac{\hbar^2 \beta}{m} - e^2 \right) = \frac{\hbar^2 \beta^2}{2m} - e^2\ \beta$$

che è minimizzata per

$$0 = E'(\beta) = \frac{\hbar^2 \beta}{m} - e^2 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\beta} = \frac{m\, e^2}{\hbar^2}$$

e vale al minimo

$$\overline{E} = E(\overline{\beta}) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{m\, e^2}{\hbar^2} \right)^2 - e^2\ \left(\frac{m\, e^2}{\hbar^2} \right) = -\frac{m\, e^4}{2\, \hbar^2}$$

Si noti che, poiché la forma funzionale delle funzioni d'onda di prova coincide con quella dell'autofunzione esatta, la stima variazionale dell'energia dello stato fondamentale fornisce il valore esatto.

2.

(a) Tenendo a mente che $\vec{A}$ dipende da $\vec{X}$:

$$[\Pi_i, X_j] = \left[P_i - \frac{e}{c}A_i, X_j\right] = [P_i, X_j] = -i\,\hbar\,\delta_{ij}$$

$$[\Pi_i, P_j] = \left[P_i - \frac{e}{c}A_i, P_j\right] = -\frac{e}{c}\,\partial_k A_i\,[X_k, P_j] = -\frac{i\,e\,\hbar}{c}\,\partial_k A_i\,\delta_{kj} = -\frac{i\,e\,\hbar}{c}\,\partial_j A_i$$

$$[\Pi_i, \Pi_j] = \left[P_i - \frac{e}{c}A_i, P_j - \frac{e}{c}A_j\right] = -\frac{e}{c}\,\partial_k A_i\,[X_k, P_j] - \frac{e}{c}\,[P_i, X_k]\,\partial_k A_j = \frac{i\,e\,\hbar}{c}\,(\partial_i A_j - \partial_j A_i)$$

(b) Sappiamo che

$$H\;|n\rangle = E_n\;|n\rangle \quad\Rightarrow\quad U(\vec{X})\,H\,U^\dagger(\vec{X})\;U(\vec{X})\,|n\rangle = E_n\;U(\vec{X})\;|n\rangle \quad\Rightarrow\quad \widetilde{H}\;|\widetilde{n}\rangle = E_n\;|\widetilde{n}\rangle$$

dove $|\widetilde{n}\rangle = U(\vec{X})\;|n\rangle$ è autostato con autovalore E_n di $\widetilde{H} = U(\vec{X})\,H\,U^\dagger(\vec{X})$. Ricordato che nella rappresentazione delle coordinate $\psi_n(\vec{x}) = \langle\vec{x}|n\rangle$, $\widetilde{\psi}_n(\vec{x}) = \langle\vec{x}|\widetilde{n}\rangle$ e

$$H = \frac{\vec{\pi}^{\,2}}{2\,m} - \frac{e^2}{|\vec{x}|} \qquad\qquad \vec{\pi} = -i\,\hbar\;\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\,\vec{A}(\vec{x})$$

osserviamo che

$$U(\vec{x})\,\left(-\frac{e^2}{|\vec{x}|}\right)\,U^\dagger(\vec{x}) = -\frac{e^2}{|\vec{x}|} \qquad\qquad U(\vec{x})\,\left(-\frac{\vec{\pi}^{\,2}}{2m}\right)\,U^\dagger(\vec{x}) = -\frac{\tilde{\vec{\pi}}^{\,2}}{2m}$$

a condizione di porre

$$\tilde{\vec{\pi}} = U(\vec{x})\;\vec{\pi}\;U^\dagger(\vec{x}) = U(\vec{x})\;\left[-i\,\hbar\;\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\,\vec{A}(\vec{x})\right]\;U^\dagger(\vec{x}) = U(\vec{x})\;\left(-i\,\hbar\;\vec{\nabla}\right)\;U^\dagger(\vec{x}) - \frac{e}{c}\,\vec{A}(\vec{x}) =$$

$$= -i\,\hbar\;\vec{\nabla} - i\,\hbar\,\frac{ie}{\hbar c}\,\vec{\nabla}\Lambda(\vec{x}) - \frac{e}{c}\,\vec{A}(\vec{x}) = -i\,\hbar\;\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\,\left[\vec{A}(\vec{x}) - \vec{\nabla}\Lambda(\vec{x})\right] = -i\,\hbar\;\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\,\tilde{\vec{A}}(\vec{x})$$

dove

$$\tilde{\vec{A}}(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}) - \vec{\nabla}\Lambda(\vec{x})$$

3.

(a)

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\psi)} + \partial_t \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2 \psi^* + i \, \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \left(i \, \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2 \right) \psi = 0 \, .$$

oppure, equivalentemente,

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\psi^*)} + \partial_t \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2 \psi - i \, \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \left(i \, \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2 \right) \psi = 0 \, .$$

(b) La densità di Lagrangiana $\mathcal{L}$ è invariante per trasformazioni globali di fase ($\alpha \in \mathbf{R}$)

$$\psi\,' = e^{-i\,\alpha}\,\psi \, , \quad (\psi^*)\,' = e^{i\,\alpha}\,\psi^* \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\delta\psi}{\alpha} = -i\,\psi \, , \qquad \frac{\delta\psi^*}{\alpha} = i\,\psi^* \, .$$

Allora, applicando il teorema di Nöther:

$$j^0 = \rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \psi} \frac{\delta \psi}{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \psi^*} \frac{\delta \psi^*}{\alpha} = |\psi|^2 \, ,$$

dove l'arbitraria costante moltiplicativa in j^μ è stata scelta per garantire l'interpretazione di j^0 come densità di probabilità, e

$$j^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k \psi} \frac{\delta \psi}{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k \psi^*} \frac{\delta \psi^*}{\alpha} = \frac{i}{2m}[(\partial_k \psi^*)\psi - (\partial_k \psi)\psi^*] \, ,$$

ovvero

$$\vec{\jmath} = \frac{i}{2m}[(\vec{\nabla}\psi^*)\psi - (\vec{\nabla}\psi)\psi^*] \, .$$

(c) Utilizzando l'espressione del gradiente in coordinate polari sferiche ricordata nel testo:

$$\psi(\vec{x},t) = e^{-i\,E\,t} \; f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{i\,k\,r}}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\nabla}\psi(\vec{x},t) = e^{-i\,E\,t} \; f_k(\theta,\varphi)\,i\,k\,\vec{u}_r\,\frac{e^{i\,k\,r}}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\psi^*(\vec{x},t) = e^{i\,E\,t} \; f_k^*(\theta,\varphi)\,\frac{e^{-i\,k\,r}}{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\psi^*(\vec{x},t) = e^{i\,E\,t} \; f_k^*(\theta,\varphi)\,(-i)\,k\,\vec{u}_r\,\frac{e^{-i\,k\,r}}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

da cui

$$\vec{\jmath} = \frac{i}{2m} \; 2 \; |f_k(\theta,\varphi)|^2 \; (-i)\,k\,\vec{u}_r\,\frac{1}{r^2} = \frac{k}{m} \; \frac{|f_k(\theta,\varphi)|^2}{r^2} \; \vec{u}_r$$

(d) Per r molto grande, il flusso di probabilità associato all'onda diffusa che attraversa una superficie sferica di raggio r centrata nell'origine non deve dipendere da r: ciò è possibile solo se $|\vec{\jmath}| \propto r^{-2}$.

4.

(a)

$$(\Box + m^2)\,\varphi(x) = 0 \qquad\qquad (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0$$

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \qquad\qquad \eta^{\mu\nu} = diag(+1,-1,-1,-1) \qquad\qquad \{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

(b) Moltiplicando ambo i membri dell'equazione di Dirac libera per $(-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)$:

$$0 = (-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = (\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu + m^2)\psi(x) =$$

$$= \left[\left(\frac{\{\gamma^\nu,\gamma^\mu\}}{2} + \frac{[\gamma^\nu,\gamma^\mu]}{2}\right)\partial_\nu\partial_\mu + m^2\right]\psi(x) = \left(\frac{\{\gamma^\nu,\gamma^\mu\}}{2}\partial_\nu\partial_\mu + m^2\right)\psi(x) =$$

$$= \left(\eta^{\nu\mu}\partial_\nu\partial_\mu + m^2\right)\psi(x) = \left(\Box + m^2\right)\psi(x)$$

dove nel passaggio della seconda riga si è sfruttato il fatto che $\partial_\nu\partial_\mu = \partial_\mu\partial_\nu$.

(c)

$$0 = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\; u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} = (\not{p} - m)\, u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} \qquad \Rightarrow \qquad \not{p}\, u(\vec{p}) = m\, u(\vec{p})$$

Prendendo il coniugato di Dirac di ambo i membri, e ricordando che $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$:

$$m\,\overline{u}(\vec{p}) = u^\dagger(\vec{p})(\gamma^\mu)^\dagger p_\mu\gamma^0 = \overline{u}(\vec{p})\,\not{p}$$

(d) Ponendo per semplicità $u(p) \equiv u$ e $\overline{u}(q) \equiv \overline{u}$, visto che non c'è rischio di confusione tra le rispettive dipendenze da p e q, e ricordando che $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu}$:

$$i\,\overline{u}\,\sigma^{\mu\nu}\,(q+p)_\nu\, u = -\frac{1}{2}\,\overline{u}\,[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,(q+p)_\nu\, u =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\, q_\nu\, u - \frac{1}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\, p_\nu\, u + \frac{1}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\nu\,\gamma^\mu\, q_\nu\, u - \frac{1}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\nu\,\gamma^\mu\, p_\nu\, u =$$

$$= -\overline{u}\,\eta^{\mu\nu}\, q_\nu\, u + \frac{1}{2}\,\overline{u}\,\not{q}\gamma^\mu\, u - \frac{1}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\mu\,\not{p}\, u + \frac{1}{2}\,\overline{u}\,\not{q}\gamma^\mu\, u + \overline{u}\,\eta^{\mu\nu}\, p_\nu\, u - \frac{1}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\mu\,\not{p}\, u =$$

$$= -\overline{u}\, q^\mu\, u + \frac{m}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\mu\, u - \frac{m}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\mu\, u + \frac{m}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\mu\, u + \overline{u}\, p^\mu\, u - \frac{m}{2}\,\overline{u}\,\gamma^\mu\, u =$$

$$= (-q^\mu + p^\mu)\,\overline{u}\, u$$

Dunque, nella notazione del testo:

$$A = -1 \qquad\qquad B = +1$$