Fisica Teorica (Parte B): Prova scritta di esonero del 25/8/2014

1.

Si consideri il sistema quantistico unidimensionale descritto dall'Hamiltoniano

$$H = \frac{P^2}{2m} + m\,\omega^2\,X^2 + \lambda\,X\,,$$

dove X e P sono gli operatori posizione ed impulso e λ è una costante reale.

(a) Si esplicitino le equazioni del moto, in visuale di Heisenberg, per gli operatori X e P, riportando i passaggi essenziali e semplificando.
(b) Si scrivano gli autovalori $E_n^{(0)}$ dell'Hamiltoniano nel caso in cui $\lambda = 0$: è consentito rifarsi a risultati noti, omettendone la derivazione.
(c) Trattando $\lambda \neq 0$ come una perturbazione, si determinino le correzioni $\Delta E_n^{(1)}$ e $\Delta E_n^{(2)}$ agli autovalori dell'Hamiltoniano, espressi al second'ordine perturbativo da $E_n^{(2)} = E_n^{(0)} + \Delta E_n^{(1)} + \Delta E_n^{(2)}$, specificando le formule generali utilizzate e riportando i passaggi essenziali.

Si ricordi che per l'oscillatore armonico semplice di frequenza angolare $\overline{\omega}$ è $X = \sqrt{\hbar/(2m\overline{\omega})}\,(a + a^\dagger)$, con l'azione degli operatori di creazione e distruzione su una base ortonormale di autostati dell'Hamiltoniano data da $a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ e $a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$.

2.

Una particella senza spin di massa m ed energia E si trova in un potenziale unidimensionale $V(x)$.

(a) Si scriva la forma generale della funzione d'onda $\psi(x)$ nell'approssimazione WKB, nella regione classicamente permessa $E > V(x)$: la derivazione non è richiesta, la notazione va definita.
(b) Supposto che il potenziale $V(x)$ corrisponda ad una buca infinita con fondo variabile,

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \textit{per} \quad x < 0 \\ f(x) & \textit{per} \quad 0 < x < a \\ \infty & \textit{per} \quad x > a \end{cases}$$

lavorando nell'approssimazione WKB ed assumendo $E > f(x)$ per $0 < x < a$, si derivi la formula che esprime la quantizzazione dell'energia, riportando i passaggi essenziali.
(c) Si verifichi che per $f(x) = 0$ la formula derivata al punto precedente riproduce gli autovalori E_n^0 dell'energia per la buca di potenziale infinita con fondo piatto.

(... continua alla pagina seguente ...)

3.

L'equazione integrale per la diffusione elastica di una particella quantistica non relativistica di massa μ ed energia E da un potenziale $V(\vec{r})$ localizzato attorno all'origine si può scrivere

$$v_k^{dif}(\vec{r}) = e^{i\,\vec{k}_{inc}\cdot\vec{r}} + \int d^3r'\, G_+(\vec{r}-\vec{r}\,')\; U(\vec{r}\,')\, v_k^{dif}(\vec{r}\,')\,,$$

dove $v_k^{dif}(\vec{r})$ è la funzione d'onda per lo stato stazionario di scattering e

$$G_+(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\,k\,r}}{r}\,, \qquad (r = |\vec{r}|)\,.$$

Equivalentemente, l'ampiezza di scattering si può scrivere

$$f_k(\theta,\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\, e^{-i\,\vec{k}_{dif}\cdot\vec{r}\,'}\; U(\vec{r}\,')\, v_k^{dif}(\vec{r}\,')\,.$$

I simboli $\vec{k}_{inc} = k\,\vec{u}_z$ e $\vec{k}_{dif} = k\,\vec{u}_r$ denotano rispettivamente il vettore d'onda incidente (nella direzione dell'asse z) ed il vettore d'onda diffuso (nella direzione individuata dagli angoli θ e φ).

(a) Si esprimano k e $U(\vec{r})$ in funzione dei dati del problema: è sufficiente la risposta.
(b) Si scrivano le equazioni differenziali cui soddisfano $v_k^{dif}(\vec{r})$ e $G_+(\vec{r})$: è sufficiente la risposta.
(c) Introdotto il vettore d'onda trasferito $\vec{K} = \vec{k}_{dif} - \vec{k}_{inc}$, si esprima $K = |\vec{K}|$ in funzione di k e degli angoli di scattering θ e φ, semplificando per quanto possibile il risultato.
(d) Partendo dalle espressioni nel testo, si ricavi un'espressione per l'ampiezza di scattering $f_k^B(\theta,\varphi)$ nell'approssimazione di Born al primo ordine, riportando i passaggi essenziali della derivazione.

4.

Si consideri, in unità naturali $\hbar = c = 1$, la densità di Lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\varphi)^*\,(\partial^\mu\varphi) - m^2\,|\varphi|^2 + i\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\psi - M\,\overline{\psi}\,\psi + \frac{1}{\Lambda}\,\overline{\psi}\,\psi\,|\varphi|^2\,,$$

dove: $\varphi(x)$ e $\varphi^*(x)$ sono un campo scalare complesso ed il suo complesso coniugato; $\psi(x)$ e $\overline{\psi}(x)$ sono un campo spinoriale di Dirac ed il suo coniugato di Dirac; m, M e Λ sono parametri reali.

(a) Si derivi l'equazione del moto per φ (o, equivalentemente, per φ^*: una è sufficiente), e la si scriva in modo da poterla confrontare facilmente con l'equazione di Klein-Gordon libera.
(b) Si derivi l'equazione del moto per ψ (o, equivalentemente, per $\overline{\psi}$: una è sufficiente), e la si scriva in modo da poterla confrontare facilmente con l'equazione di Dirac libera.
(c) Si ricavi la quadricorrente 'conservata' $j^\mu(x)$ associata alle trasformazioni

$$\psi'(x) = e^{i\,\alpha}\;\psi(x)\,, \qquad \varphi'(x) = e^{i\,\alpha}\;\varphi(x)\,,$$

dove α è un parametro reale indipendente dalle coordinate spazio-temporali. Si può dare per scontato che tali trasformazioni lasciano invariante $\mathcal{L}$ e che la quadricorrente soddisfa $\partial_\mu j^\mu = 0$ lungo le soluzioni delle equazioni del moto.

Soluzioni

1.

(a)
$$\frac{dX}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\,[X,H] = -\frac{i}{\hbar\; 2m}[X,P^2] = -\frac{i}{\hbar\; 2m}\; 2P\; i\hbar = \frac{P}{m}$$
$$\frac{dP}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\,[P,H] = -\frac{i}{\hbar}\,\left(m\omega^2\,[P,X^2] + \lambda\,[P,X]\right) = -\frac{i}{\hbar}\left(2\,m\omega^2\,X + \lambda\right)\,(-i\hbar) = -(2m\omega^2 X + \lambda)$$
La soluzione delle equazioni non era richiesta.
(b) Per $\lambda = 0$, l'Hamiltoniano H è quello di un oscillatore armonico di frequenza angolare $\overline{\omega} = \sqrt{2}\,\omega$: $m\omega^2 = (1/2)m(\sqrt{2}\omega)^2 = (1/2)m\overline{\omega}^2$. Pertanto, come è noto, per $\lambda = 0$ gli autovalori sono

$$E_n^{(0)} = \hbar\,\overline{\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar\sqrt{2}\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad (n = 0,1,2\ldots)$$

(c)

$$\Delta E_n^{(1)} = \langle n|\lambda\,X|n\rangle = \lambda\sqrt{\frac{\hbar}{2m\overline{\omega}}}\,\langle n|a + a^\dagger|n\rangle = \lambda\sqrt{\frac{\hbar}{2\sqrt{2}m\omega}}\,\langle n|a + a^\dagger|n\rangle = 0$$
$$\Delta E_n^{(2)} = \sum_{p\neq n}\;\frac{-1}{E_p^{(0)} - E_n^{(0)}}\;|\langle p|\lambda\,X|n\rangle|^2$$

con $E_p^{(0)} - E_n^{(0)} = \hbar\sqrt{2}\omega\,(p-n)$ e

$$\langle p|\lambda\;X|n\rangle = \lambda\sqrt{\frac{\hbar}{2m\overline{\omega}}}\,\langle p|a + a^\dagger|n\rangle = \lambda\sqrt{\frac{\hbar}{2\sqrt{2}m\omega}}\,(\sqrt{n}\,\delta_{p,n-1} + \sqrt{n+1}\,\delta_{p,n+1})$$

da cui
$$\Delta E_n^{(2)} = \sum_p\;\frac{-1}{\hbar\sqrt{2}\omega\;(p-n)}\;\lambda^2\,\frac{\hbar}{2\sqrt{2}m\omega}\,(\sqrt{n}\,\delta_{p,n-1} + \sqrt{n+1}\,\delta_{p,n+1})^2$$
$$= \frac{\lambda^2}{4m\omega^2}\;(n - n - 1) = -\frac{\lambda^2}{4m\omega^2}$$
In alternativa, sfruttando il fatto che la perturbazione è lineare in X, si potevano determinare gli autovalori esatti ed identificare le potenze di λ.

2.

(a)

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[A\,e^{\frac{i}{\hbar}\int dx\,p(x)} + B\,e^{-\frac{i}{\hbar}\int dx\,p(x)}\right] = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[A\,e^{\frac{i}{\hbar}\int_{x_0}^x dx'\,p(x')} + B\,e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{x_0}^x dx'\,p(x')}\right],$$

dove $p(x) = \sqrt{2m\,[E - V(x)]}$, A e B sono due costanti arbitrarie e x_0 può essere scelto arbitrariamente nella regione classicamente permessa.

(b) Nelle ipotesi fatte, le condizioni al contorno appropriate sulla funzione d'onda $\psi(x)$ sono $\psi(0) = 0$ e $\psi(a) = 0$. Conviene allora scegliere $x_0 = 0$ e riscrivere la soluzione generale come:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\,[C\,\sin\phi(x) + D\,\cos\phi(x)]\ , \qquad \phi(x) = \frac{1}{\hbar}\int_0^x dx'\,p(x')\,,$$

dove C e D sono due costanti arbitrarie. La condizione al contorno $\psi(0) = 0$ richiede $D = 0$. La condizione al contorno $\psi(a) = 0$ richiede poi che sia $\sin\phi(a) = 0$, ovvero

$$\int_0^a dx\,p(x) = n\,\pi\,\hbar \qquad\qquad p(x) = \sqrt{2m\,[E - f(x)]} \qquad\qquad (n = 1, 2\ldots)$$

(c) Da $f(x) = 0$ segue che per $0 < x < a$ è $p(x) = \sqrt{2mE}$, da cui

$$n\,\pi\,\hbar = \int_0^a dx\,\sqrt{2mE} = \sqrt{2mE}\ a \qquad \Rightarrow \qquad E_n^0 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m\,a^2} \quad (n = 1, 2\ldots)$$

3.

(a)

$$k = \frac{\sqrt{2\,\mu\,E}}{\hbar} \qquad\qquad U(\vec{r}) = \frac{2\,\mu\,V(\vec{r})}{\hbar^2}$$

(b)

$$\left[\vec{\nabla}^{\,2} + k^2 - U(\vec{r})\right]\ v_k^{dif}(\vec{r}) = 0 \qquad\qquad (\vec{\nabla}^{\,2} + k^2)\,G(\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r})\,,$$

(c) Osservato che l'angolo di scattering θ coincide con l'angolo tra $\vec{k}_{inc} = k\,\vec{u}_z$ e $\vec{k}_{dif} = k\,\vec{u}_r$, avremo:

$$K = \left|\vec{k}_{dif} - \vec{k}_{inc}\right| = 2\,k\,\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = 2\,k\,\sin\frac{\theta}{2}\,.$$

(d) L'approssimazione di Born consiste nel trattare $U(\vec{r})$ come una perturbazione. All'ordine zero

$$[v_k^{dif}(\vec{r})]^{(0)} = e^{i\,\vec{k}_{inc}\cdot\vec{r}}$$

che sostituito nell'espressione dell'ampiezza di scattering fornisce:

$$f_k^B(\theta,\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,e^{i\,(\vec{k}_{inc}-\vec{k}_{dif})\cdot\vec{r}\,'}\,U(\vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,e^{i\,\vec{K}\cdot\vec{r}\,'}\,U(\vec{r}\,') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d^3r\,e^{-i\,\vec{K}\cdot\vec{r}}\,V(\vec{r})$$

4.

(a)

$$0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*} - \partial_\mu\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi^*} = -m^2\varphi + \frac{1}{\Lambda}\overline{\psi}\psi\varphi - \partial_\mu\partial^\mu\varphi \qquad \Rightarrow \qquad (\Box + m^2)\,\varphi = \frac{1}{\Lambda}\overline{\psi}\psi\varphi$$

(b)

$$0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overline{\psi}} - \partial_\mu\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\overline{\psi}} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - M\psi + \frac{1}{\Lambda}\psi|\varphi|^2 \qquad \Rightarrow \qquad (i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\,\psi = -\frac{1}{\Lambda}|\varphi|^2\psi$$

(c) Applicando il teorema di Noether:

$$\delta\varphi = i\alpha\varphi \qquad \delta\varphi^* = -i\alpha\varphi^* \qquad\qquad \delta\psi = i\alpha\psi \qquad \delta\overline{\psi} = -i\alpha\overline{\psi}$$

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\,\frac{\delta\varphi}{\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi^*}\,\frac{\delta\varphi^*}{\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi}\,\frac{\delta\psi}{\alpha} + \frac{\delta\overline{\psi}}{\alpha}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\overline{\psi}} = i\,(\varphi\partial^\mu\varphi^* - \varphi^*\partial^\mu\varphi) - \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Una costante moltiplicativa non nulla resta indeterminata, ma il segno relativo dei tre termini che compaiono in j^μ è fissato.