Fisica Teorica (Parte B): Prova scritta di esonero del 17/9/2014

1.

Si consideri un sistema quantistico con spettro discreto, indicando con $|\psi_n\rangle$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ una base ortonormale di autostati dell'Hamiltoniano H e con E_n i rispettivi autovalori.

(a) Si enunci e si dimostri, nel caso in esame, il teorema su cui si fonda il metodo variazionale. Ci si limiti a quanto richiesto, senza illustrare il metodo variazionale.

(b) Si spieghi perché di solito la stima variazionale $\overline{E}$ per l'energia E_0 dello stato fondamentale è più accurata della stima variazionale $|\overline{\psi}\rangle$ del corrispondente vettore di stato $|\psi_0\rangle$.

2.

Si consideri un sistema quantistico soggetto ad una perturbazione $V(t)$ diversa da zero soltanto nell'intervallo temporale $[0, T]$, e continua in $t = 0$ e $t = T$.

(a) Si scriva (senza derivarla) l'espressione per la probabilità $P_{i\to n}$ di trovare il sistema nell'autostato imperturbato $|n\rangle$ di energia E_n al tempo $t = T$, se esso si trovava nell'autostato imperturbato $|i\rangle$ al tempo $t = 0$, al primo ordine nell'espansione perturbativa.

(b) Si dimostri (integrando per parti) che tale probabilità è anche data da

$$P_{i\to n} = A_{ni} \left| \int_0^T dt \; e^{i\,\omega_{ni}\,t} \; \frac{d}{dt} \langle n|V(t)|i\rangle \right|^2 \qquad\qquad \left(\omega_{ni} = \frac{E_n - E_i}{\hbar}\right)$$

determinando A_{ni} in funzione dei dati del problema.

(c) Posto

$$V(t) = \begin{cases} 0 & \textit{per} \quad t \le 0 \\ (2t/T)\; W & \textit{per} \quad 0 \le t \le T/2 \\ (2 - 2t/T)\; W & \textit{per} \quad T/2 \le t \le T \\ 0 & \textit{per} \quad T \le t \end{cases}$$

dove W è un operatore indipendente dal tempo, si calcoli $P_{i\to n}$ in termini dell'elemento di matrice $W_{ni} = \langle n|W|i\rangle$ e di funzioni trigonometriche, semplificando quanto più possibile.

(. . . continua alla pagina seguente . . .)

3.

Una particella di carica q nel potenziale $V(\vec{x})$ è anche soggetta all'azione di un debole campo magnetico uniforme e costante $\vec{B}$, per cui l'Hamiltoniano totale risultante è dato da

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{P} - \frac{q}{c}\,\vec{A}(\vec{X})\right]^2 + V(\vec{X})$$

(a) Si determini per quale valore della costante λ è lecito scrivere

$$\vec{A} = \lambda\,\vec{X} \times \vec{B}$$

Va riportata la derivazione (accettata anche in componenti anziché in notazione vettoriale).

(b) Introdotta la visuale di interazione, con Hamiltoniano 'libero' dato da

$$H_0 = \frac{\vec{P}^{\,2}}{2m} + V(\vec{X})$$

si derivino le equazioni del moto per $X_I(t)$ e $P_I(t)$ in visuale di interazione.

4.

Sia data l'equazione di Dirac libera $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$ $(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu} = diag(+1,-1,-1,-1))$.

(a) Posto $\gamma^0 = \beta$ e $\gamma^i = \beta\,\alpha^i$ $(i = 1,2,3)$, si scriva quanto valgono $\{\alpha^i, \alpha^j\}$, $\{\alpha^i, \beta\}$ e β^2: la dimostrazione non è richiesta.

(b) Si mostri che l'equazione di Dirac libera si può riscrivere nella forma $i\,\partial_t\,\psi = H\,\psi$ e si determini H in funzione di $\vec{\alpha}$, β e $\vec{p} = -i\,\vec{\nabla}$: vanno riportati i passaggi significativi della derivazione.

Si assuma ora, con Φ e X spinori di Pauli dipendenti da $\vec{x}$ e t e con $\vec{\sigma}$ matrici di Pauli, che:

$$\psi = e^{-i\,m\,t}\begin{pmatrix} \Phi \\ X \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Si determinino le equazioni del moto per Φ e X, nella forma $i\partial_t\Phi = \ldots$ e $i\partial_t X = \ldots$, senza approssimazioni.

(d) Si risolva l'equazione per X nel limite non-relativistico, illustrando l'approssimazione.

(e) Si risolva l'equazione per Φ nella medesima approssimazione, e la si confronti con l'equazione di Schrödinger libera.

(f) Sempre nel limite non-relativistico, si esprimano i bilineari $\overline{\psi}\gamma^0\psi$ e $\overline{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi$ in termini dei soli spinori a due componenti X e $X^\dagger$, tenendo solo il termine dominante in ciascun risultato.

Soluzioni

1.

(a) Il teorema afferma che il valore di aspettazione dell'Hamiltoniano H in uno stato qualsiasi rappresentato dal vettore $|\psi\rangle$ è sempre maggiore della o eguale alla energia E_0 dello stato fondamentale:

$$\frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \geq E_0 \qquad\qquad (\forall|\psi\rangle \in \mathcal{H})$$

Infatti, posto $|\psi\rangle = \sum_n c_n\,|\psi_n\rangle$, con $H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ e $\langle\psi_m|\psi_n\rangle = \eta_{mn}$, avremo $\langle\psi|\psi\rangle = \sum_m |c_m|^2$ e $\langle\psi|H|\psi\rangle = \sum_n E_n|c_n|^2$, da cui

$$\frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{E_0\sum_n E_n|c_n|^2}{\sum_m |c_m|^2} \geq \frac{E_0\sum_n |c_n|^2}{\sum_m |c_m|^2} = E_0$$

(b) Indicati con $|\overline{\psi}\rangle$ e $\overline{E}$ le stime variazionali dello stato fondamentale $|\psi_0\rangle$ e del corrispondente autovalore E_0, rispettivamente, non è restrittivo scrivere

$$|\overline{\psi}\rangle = |\psi_0\rangle + \epsilon\,|\psi_\perp\rangle \qquad\qquad |\epsilon| < 1 \quad \langle\psi_0|\psi_0\rangle = \langle\psi_\perp|\psi_\perp\rangle = 1 \quad \langle\psi_0|\psi_\perp\rangle = 0$$

dove $H|\psi_0\rangle = E_0\,|\psi_0\rangle$. Allora, osservato che $\langle\overline{\psi}|\overline{\psi}\rangle = 1+\epsilon^2$:

$$\overline{E} = \frac{\langle\overline{\psi}|H|\overline{\psi}\rangle}{\langle\overline{\psi}|\overline{\psi}\rangle} = \frac{(\langle\psi_0| + \epsilon\,\langle\psi_\perp|)H|(|\psi_0\rangle + \epsilon\,|\psi_\perp\rangle)}{1+\epsilon^2}$$

ovvero, posto $E_\perp = \langle\psi_\perp|H|\psi_\perp\rangle$,

$$\overline{E} = \frac{E_0 + \epsilon^2\,E_\perp}{1+\epsilon^2} = E_0 + \epsilon^2\,(E_\perp - E_0) + \ldots$$

Dunque se la differenza tra l'autostato stimato $|\overline{\psi}\rangle$ e quello esatto $|\psi_0\rangle$ è di ordine ϵ, allora la differenza tra l'autovalore stimato $\overline{E}$ e quello esatto E_0 è di ordine ϵ^2.

2.

(a)

$$P_{i\to n} = \frac{1}{\hbar^2}\,\left|\int_0^T dt\; e^{i\,\omega_{ni}\,t}\;\langle n|V(t)|i\rangle\right|^2$$

(b)

$$\int_0^T dt\; e^{i\,\omega_{ni}\,t}\;\langle n|V(t)|i\rangle = \left[\frac{1}{i\,\omega_{ni}}\;e^{i\,\omega_{ni}\,t}\;\langle n|V(t)|i\rangle\right]_0^T -$$

$$-\frac{1}{i\,\omega_{ni}}\;\int_0^T dt\; e^{i\,\omega_{ni}\,t}\;\frac{d}{dt}\langle n|V(t)|i\rangle = \frac{i}{\omega_{ni}}\;\int_0^T dt\; e^{i\,\omega_{ni}\,t}\;\frac{d}{dt}\langle n|V(t)|i\rangle$$

da cui

$$P_{i\to n} = \frac{1}{(E_n - E_i)^2}\;\left|\int_0^T dt\; e^{i\,\omega_{ni}\,t}\;\frac{d}{dt}\langle n|V(t)|i\rangle\right|^2 \quad\Rightarrow\quad A_{ni} = \frac{1}{(E_n-E_i)^2}$$

(c) Utilizzando la formula del punto (b), ed osservando che

$$\frac{d}{dt}\langle n|V(t)|i\rangle = \begin{cases} 0 & per \quad t \leq 0 \\ (2/T)\; W_{ni} & per \quad 0 \leq t \leq T/2 \\ -(2/T) W_{ni} & per \quad T/2 \leq t \leq T \\ 0 & per \quad T \leq t \end{cases}$$

avremo

$$\int_0^T dt\; e^{i\,\omega_{ni}\,t}\;\frac{d}{dt}\langle n|V(t)|i\rangle = \frac{2\,W_{ni}}{T}\left[\int_0^{T/2} dt\; e^{i\,\omega_{ni}\,t} - \int_{T/2}^{T} dt\; e^{i\,\omega_{ni}\,t}\right] =$$

$$= \frac{2\,W_{ni}}{i\,\omega_{ni}\,T}\left\{\left[e^{i\,\omega_{ni}\,t}\right]_0^{T/2} - \left[e^{i\,\omega_{ni}\,t}\right]_{T/2}^{T}\right\} = \frac{2\,i\,W_{ni}}{\omega_{ni}\,T}\left[1 + e^{i\,\omega_{ni}\,T} - 2\,e^{i\,\omega_{ni}\,T/2}\right] =$$

$$= \frac{2\,i\,W_{ni}}{\omega_{ni}\,T}\left[1 - e^{i\,\omega_{ni}\,T/2}\right]^2 = \frac{2\,i\,W_{ni}}{\omega_{ni}\,T} e^{i\,\omega_{ni}\,T/2}\left[e^{-i\,\omega_{ni}\,T/4} - e^{i\,\omega_{ni}\,T/4}\right]^2$$

da cui

$$P_{i\to n} = \frac{4\,\hbar^2\,|W_{ni}|^2}{(E_n - E_i)^4\,T^2}\left|e^{-i\,\omega_{ni}\,T/4} - e^{i\,\omega_{ni}\,T/4}\right|^4 = \frac{64\,\hbar^2\,|W_{ni}|^2}{(E_n - E_i)^4\,T^2}\,\sin^4\left(\frac{\omega_{ni}\,T}{4}\right)$$

3.

(a) In componenti:

$$B_i = \epsilon_{ijk}\,\partial_j\,A_k = \epsilon_{ijk}\,\partial_j\,(\lambda\,\epsilon_{klm}\,X_l\,B_m) = \lambda\,\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm}\,(\partial_j\,X_l)\,B_m = \lambda\,\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm}\,\delta_{jl}\,B_m =$$

$$= \lambda\,\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{kjm}\,B_m = -\lambda\,\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{jkm}\,B_m = -2\,\lambda\,\delta_{im}\,B_m = -2\,\lambda\,B_i \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -\frac{1}{2}$$

Gli studenti familiari con il calcolo vettoriale potevano arrivare al risultato ricordando la relazione

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{b}) - \vec{b}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{b}$$

che applicata a $\vec{a} = \vec{X}$ e $\vec{b} = \vec{B}$ fornisce

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \lambda\vec{\nabla}\times(\vec{X}\times\vec{B}) = \lambda[-\vec{B}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{X}) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{X}] = \lambda(-3+1)\,\vec{B} = -2\,\lambda\,\vec{B}$$

(b) Prendendo tutti gli operatori in visuale di interazione, ed esplicitando l'indice spaziale $i = 1, 2, 3$:

$$\frac{d}{dt}\,X^i(t) = -\frac{i}{\hbar}[X^i, H_0] = -\frac{i}{2m\,\hbar}[X^i, \vec{P}^2] = -\frac{i}{2m\,\hbar}[X^i, P^j]\,(2P_j) = -\frac{i}{m\,\hbar}\,(i\hbar\,\delta^{ij})\,P_j = \frac{P^i}{m}$$

$$\frac{d}{dt}\,P^i(t) = -\frac{i}{\hbar}[P^i, H_0] = -\frac{i}{\hbar}[P^i, V(\vec{X})] = -\frac{i}{\hbar}[P^i, X^j]V_j(\vec{X})] = -\frac{i}{\hbar}\,(-i\hbar\,\delta^{ij})\,V_j(\vec{X})] = -V^i(\vec{X})$$

ovvero

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{\vec{P}}{m} \qquad\qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = -\vec{\nabla}\,V(\vec{X})$$

4.

(a)

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\,\delta^{ij}\, I_4 \qquad \{\alpha^i, \beta\} = 0 \qquad \beta^2 = I_4$$

(b)

$$0 = (i\,\gamma^0\,\partial_0 + i\,\gamma^i\,\partial_i - m)\psi = (i\,\beta\,\partial_t + i\,\beta\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - m)\psi \quad \Rightarrow \quad 0 = (i\,\partial_t + i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - \beta\,m)\psi$$

$$\Rightarrow \quad i\,\partial_t\,\psi = (-i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta\,m)\psi = (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta\,m)\psi \qquad \Rightarrow \qquad H = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta\,m$$

(c)

$$i\,\partial_t\,\psi = (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta\,m)\psi \quad \Rightarrow \quad i\,\partial_t\left[e^{-i\,m\,t}\begin{pmatrix}\Phi \\ X\end{pmatrix}\right] = e^{-i\,m\,t}\begin{pmatrix} m & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi \\ X\end{pmatrix}$$

$$i\,\partial_t\,\Phi = \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\;X \qquad\qquad i\,\partial_t\,X = \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\;\Phi - 2m\,X$$

(d) L'approssimazione non-relativistica nell'equazione per X consiste nel trascurare il termine $i\partial_t\,X$ (associabile all'energia cinetica non-relativistica) rispetto al termine $2\,m\,X$ (associabile all'energia di riposo), ed in tale approssimazione si ottiene

$$X \simeq \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2m}\,\Phi$$

(e) Sostituendo il risultato precedente nell'equazione per Φ si ottiene

$$i\,\partial_t\,\Phi \simeq \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{2m}\,\Phi = \frac{(\vec{p})^2}{2m}\,\Phi$$

che è proprio l'equazione di Schrödinger libera per lo spinore non-relativistico Φ a due componenti.

(f) In realtà la domanda che volevo porre era di esprimere i bilineari in funzione di Φ e $\Phi^\dagger$, non di X e $X^\dagger$, un refuso ha reso l'esercizio leggermente più difficile ma ho tenuto conto di questo nella valutazione. Osserviamo che $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^{-1} = (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})/\vec{p}^{\,2}$. Infatti $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})/\vec{p}^{\,2} = \vec{p}^{\,2}/\vec{p}^{\,2} = 1$. Allora

$$\Phi = \frac{2\,m\;\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\vec{p}^{\,2}}\,X \qquad\qquad \Phi^\dagger = X^\dagger\;\frac{2\,m\;\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\vec{p}^{\,2}}$$

Conviene comunque esprimere prima i bilineari in termini di Φ e $\Phi^\dagger$, per poi identificare i termini dominanti e infine passare a X e $X^\dagger$:

$$\overline{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = (\Phi^\dagger\;X^\dagger)\begin{pmatrix}\Phi \\ X\end{pmatrix} = (\Phi^\dagger \quad \Phi^\dagger\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2m})\begin{pmatrix}\Phi \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2m}\,\Phi\end{pmatrix} = \Phi^\dagger\,\Phi\left(1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{4m^2}\right) \simeq \Phi^\dagger\,\Phi$$

$$\overline{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi = \psi^\dagger\gamma^5\psi = (\Phi^\dagger\;X^\dagger)\begin{pmatrix}0 & I_2 \\ I_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi \\ X\end{pmatrix} =$$

$$= (X^\dagger\;\Phi^\dagger)\begin{pmatrix}\Phi \\ X\end{pmatrix} = (\Phi^\dagger\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2m} \quad \Phi^\dagger)\begin{pmatrix}\Phi \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2m}\,\Phi\end{pmatrix} = \Phi^\dagger\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m}\,\Phi$$

da cui

$$\overline{\psi}\gamma^0\psi = X^\dagger\;\frac{4\,m^2}{\vec{p}^{\,2}}\,X \qquad\qquad \overline{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi = X^\dagger\;\frac{2\,m\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\vec{p}^{\,2}}\,X$$