Fisica Teorica (Parte B): I prova scritta in itinere dell'11/11/2013

È consentito utilizzare risultati discussi a lezione senza dimostrarli. Le risposte ai quesiti posti devono essere però giustificate, riportando i passaggi essenziali della loro derivazione.

1.

Si consideri un sistema quantistico descritto dall'Hamiltoniano $H = H_0 + V_F$, dove

$$H_0 = \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 Q^2 = \hbar\,\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad V_F = -F\,Q \quad (0 \neq F \in \mathbf{R})\,.$$

Si ricordi che per l'oscillatore armonico semplice

$$Q = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}(a^\dagger + a)\,, \qquad P = i\sqrt{\frac{M\omega\hbar}{2}}(a^\dagger - a)\,,$$

ed inoltre

$$a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,, \qquad a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,,$$

dove $\{|n\rangle\,,\ (n = 0, 1, 2, \ldots)\}$ è un'opportuna base ortonormale di autostati di H_0.

(a) Si discuta se V_F e H_0 possono essere diagonalizzati simultaneamente.

(b) Si determini l'elemento di matrice $\langle m|V_F|n\rangle$.

(c) Si calcolino le correzioni perturbative all'n-esimo autovalore $E_n^{(0)}$ di H_0, dovute alla perturbazione V_F, al primo ed al secondo ordine, utilizzando la notazione $E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \ldots$

(d) In *visuale di interazione*, si esprima la derivata seconda dell'interazione $V_F(t)$ rispetto al tempo t in funzione degli operatori $Q(t)$ e $P(t)$.

2.

Sia $\psi_{WKB}(x)$ l'approssimazione WKB per l'autofunzione di energia E di $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$.

(a) Perché $\psi_{WKB}(x)$ non è una buona approssimazione se x è troppo vicino ad un punto di transizione in cui $V(x) = E$? Si dia una spiegazione sintetica, in poche righe.

(b) Sia $x = 0$ un punto di transizione, $V(0) = E$, con $V(x) < E$ per $x > 0$: si scriva (senza derivarla) la forma generica di $\psi_{WKB}(x)$ per $x > 0$, e se ne identifichi la patologia per $x \to 0^+$.

(. . . continua alla pagina seguente . . .)

3.

Si consideri una particella quantistica di massa m nella buca infinita di potenziale

$$V = \begin{cases} \infty & x < -1 \\ 0 & -1 \le x \le 1 \\ \infty & x > 1 \end{cases}$$

Si applichi il metodo variazionale per ottenere una stima $\overline{E_0}$ dell'energia E_0 dello stato fondamentale, utilizzando la seguente classe di funzioni di prova

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ A\,(1 - |x|^{2\lambda}) & -1 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \qquad \left(0 < A \in \mathbf{R}\,,\ \frac{1}{2} < \lambda \in \mathbf{R}\right)$$

Posto $\overline{E_0} = k\,E_0$, e ricordato che il risultato esatto è $E_0 = \pi^2\hbar^2/(8m)$, si trovi un'espressione per k, semplificandola quanto più possibile. *(I conti sono semplici ma laboriosi, si consiglia di affrontarli dopo aver completato gli altri problemi, enunciando prima a parole l'obiettivo.)*

4.

In visuale di Schrödinger, siano $H(t)$ l'Hamiltoniano di un sistema quantistico e $U(t)$ un operatore unitario, entrambi dipendenti dal tempo. Si indichi con $|\psi(t)\rangle$ il vettore di stato al generico tempo t e si consideri la trasformazione $|\psi(t)\rangle' = U(t)\,|\psi(t)\rangle$.

(a) Come va completata la definizione dell'operatore trasformato

$$H'(t) = U(t)\,H(t)\,U^\dagger(t) + \Delta(t)\,,$$

identificando l'operatore incognito $\Delta(t)$ in termini dei dati del problema, affinché l'equazione di Schrödinger sia covariante? Nei passaggi si può sottintendere la dipendenza da t: $U(t) \equiv U$, etc.

(b) Si applichi il risultato ottenuto determinando esplicitamente $H'(t)$ nel caso di una particella carica in un campo elettromagnetico assegnato, in cui

$$H(t) = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\,\varphi\,, \quad U(t) = e^{\frac{i\,q\,\Lambda}{\hbar c}}\,, \qquad [\vec{A} \equiv \vec{A}(\vec{X}, t)\,,\ \varphi \equiv \varphi(\vec{X}, t)\,,\ \Lambda \equiv \Lambda(\vec{X}, t)]\,.$$

(c) Si derivino esplicitamente, a partire dal risultato precedente, le leggi di trasformazione per i potenziali, $\vec{A}' = \vec{A}'(\vec{A}, \Lambda)$ e $\varphi' = \varphi'(\varphi, \Lambda)$, applicando le quali si passa da $H(t)$ a $H'(t)$.

Soluzioni (versione A)

1

(a) Non è possibile diagonalizzare simultaneamente V_F e H_0, in quanto

$$[V_F, H_0] = \left[-F\,Q\,,\ \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 Q^2\right] = -\frac{F}{2M}[Q\,,\ P^2] = -\frac{i\hbar F}{M}\,P \neq 0\,.$$

(b)

$$\langle m|V_F|n\rangle = -F\langle m|Q|n\rangle = -F\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}\langle m|a^\dagger + a|n\rangle =$$

$$= -F\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}(\sqrt{n+1}\,\langle m|n+1\rangle + \sqrt{n}\,\langle m|n-1\rangle) = -F\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}(\delta_{m,n+1}\sqrt{n+1} + \delta_{m,n-1}\sqrt{n})$$

(c) Sulla base delle formule della teoria delle perturbazioni indipendente dal tempo e del risultato precedente:

$$E_n^{(1)} = \langle n|V_F|n\rangle = 0$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n}\frac{|\langle k|V_F|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = \frac{F^2\,\hbar}{2M\omega}\sum_{k\neq n}\frac{(\delta_{k,n+1}\sqrt{n+1} + \delta_{k,n-1}\sqrt{n})^2}{(n-k)\,\hbar\omega} =$$

$$= \frac{F^2}{2M\omega^2}\left[\frac{(\sqrt{n+1})^2}{-1} + \frac{(\sqrt{n})^2}{+1}\right] = \frac{F^2}{2M\omega^2}(-n-1+n) = -\frac{F^2}{2M\omega^2}$$

Era accettabile anche calcolare gli autovalori esatti e poi espandere.

(d) In visuale di interazione

$$\frac{dV_F}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[V_F, H_0] = -\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{i\hbar F}{M}\right)\,P = -\frac{F}{M}\,P$$

Ma

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[P, H_0] = -\frac{i}{\hbar}\left[P, \frac{1}{2}M\omega^2 Q^2\right] = -\frac{iM\omega^2}{2\hbar}[P, Q^2] = -\frac{iM\omega^2}{2\hbar}(-2i\hbar Q) = -M\omega^2\,Q$$

da cui

$$\frac{d^2V_F}{dt^2} = F\,\omega^2\,Q$$

2

(a) L'approssimazione WKB assume che il potenziale $V(x)$ vari lentamente rispetto alla lunghezza caratteristica $\lambda(x) = 2\pi\hbar/|p(x)|$, dove $p(x) \equiv \sqrt{2m[E - V(x)]}$. Per $V(x) \to E$ è anche $p(x) \to 0$, dunque $\lambda(x) \to \infty$, e l'approssimazione viene a cadere.

(b)

$$\psi_{WKB}(x) = \frac{C}{\sqrt{p(x)}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^x dx'\,p(x')} + \frac{D}{\sqrt{p(x)}}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^x dx'\,p(x')}$$

con C e D costanti. Si vede subito che per $x \to 0^+$ è $V(x) \to E^-$ e dunque $p(x) \to 0^+$, pertanto il modulo dell'ampiezza delle funzioni oscillanti in ψ_{WKB} diverge.

3.

Per prima cosa dobbiamo determinare la costante di normalizzazione A:

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,|\psi|^2=A^2\int_{-1}^{1}dx\,(1-|x|^{2\lambda})^2=2A^2\int_0^1 dx\,(1-2x^{2\lambda}+x^{4\lambda})=2A^2\left[x-\frac{2x^{2\lambda+1}}{2\lambda+1}+\frac{x^{4\lambda+1}}{4\lambda+1}\right]_0^1=$$

$$=2A^2\left(1-\frac{2}{2\lambda+1}+\frac{1}{4\lambda+1}\right)=2A^2\frac{(2\lambda+1)(4\lambda+1)-2(4\lambda+1)+2\lambda+1}{(2\lambda+1)(4\lambda+1)}=A^2\frac{16\lambda^2}{(2\lambda+1)(4\lambda+1)}$$

dunque

$$A^2=\frac{(2\lambda+1)(4\lambda+1)}{16\lambda^2}$$

Osservato che

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-2\lambda(2\lambda-1)\,A\,|x|^{2\lambda-2}$$

avremo

$$\langle H\rangle_\lambda=-2\lambda(2\lambda-1)\,A^2\,\frac{-\hbar^2}{2m}\int_{-1}^{1}dx\,(1-|x|^{2\lambda})\,|x|^{2\lambda-2}=$$

$$=2\lambda(2\lambda-1)\,2\,\frac{(2\lambda+1)(4\lambda+1)}{16\lambda^2}\,\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^1 dx\,(x^{2\lambda-2}-x^{4\lambda-2})=$$

$$=\frac{(2\lambda-1)(2\lambda+1)(4\lambda+1)}{4\lambda}\,\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{x^{2\lambda-1}}{2\lambda-1}-\frac{x^{4\lambda-1}}{4\lambda-1}\right]_0^1=$$

$$=\frac{(2\lambda-1)(2\lambda+1)(4\lambda+1)}{4\lambda}\,\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{2\lambda-1}-\frac{1}{4\lambda-1}\right)=$$

$$=\frac{(2\lambda-1)(2\lambda+1)(4\lambda+1)}{4\lambda}\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{2\lambda}{(2\lambda-1)(4\lambda-1)}=\frac{\hbar^2}{4m}\,\frac{(2\lambda+1)(4\lambda+1)}{(4\lambda-1)}$$

Per minimizzare rispetto a λ risolviamo

$$0=\frac{d\langle H\rangle_\lambda}{d\lambda}\propto\frac{(4\lambda+1+4\lambda+2)(4\lambda-1)-2(2\lambda+1)(4\lambda+1)}{(4\lambda-1)^2}\propto$$

$$\propto(8\lambda+3)(4\lambda-1)-(4\lambda+2)(4\lambda+1)=16\lambda^2-8\lambda-5\qquad\Rightarrow\qquad\overline{\lambda}=\frac{1+\sqrt{6}}{4}\qquad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\qquad\overline{E_0}=\frac{\hbar^2}{4m}\,\frac{(2\overline{\lambda}+1)(4\overline{\lambda}+1)}{(4\overline{\lambda}-1)}=\frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{5}{2}+\sqrt{6}\right)$$

Allora

$$k=\frac{\overline{E_0}}{E_0}=\frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{5}{2}+\sqrt{6}\right)\frac{8m}{\pi^2\hbar^2}=\frac{5+2\sqrt{6}}{\pi^2}\qquad(\simeq 1.003)$$

4.

(a) Vogliamo che sia

$$i\,\hbar\,\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\rangle = H(t)\,|\psi(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad i\,\hbar\,\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\rangle\,' = H\,'(t)\,|\psi(t)\rangle\,'$$

Sulla base dei dati del problema, la seconda equazione diventa, sottintendendo per semplicità di notazione la dipendenza dal tempo in stati ed operatori:

$$i\,\hbar\,\frac{dU}{dt}\,|\psi\rangle + i\,\hbar\,U\,\frac{d|\psi\rangle}{dt} = U\,H\,U^\dagger\,U\,|\psi\rangle + \Delta\,U\,|\psi\rangle$$

da cui, se prima della trasformazione l'equazione di Schrödinger è soddisfatta:

$$i\,\hbar\,\frac{dU}{dt} = \Delta\,U \qquad \Rightarrow \qquad \Delta = i\,\hbar\,\frac{dU}{dt}\,U^\dagger$$

(b) Sottintendendo ancora per semplicità di notazione la dipendenza dal tempo

$$\vec{X}\,' = U\,\vec{X}\,U^{-1} = \vec{X}\,, \quad \vec{P}\,' = U\,\vec{P}\,U^{-1} = \vec{P} - i\,\hbar\,U\vec{\nabla}U^{-1} = \vec{P} - i\,\hbar\,\left(\frac{-i\,q}{\hbar\,c}\right)\vec{\nabla}\Lambda = \vec{P} - \frac{q}{c}\,\vec{\nabla}\Lambda\,,$$

da cui

$$H\,' = U\,H\,U^{-1} + i\,\hbar\,\frac{dU}{dt}\,U^{-1} = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\,\vec{\nabla}\Lambda - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\,\varphi - \frac{q}{c}\,\frac{\partial\Lambda}{\partial t} =$$

$$= \frac{1}{2m}\left[\vec{P} - \frac{q}{c}(\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda)\right]^2 + q\,\left(\varphi - \frac{1}{c}\,\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)\,.$$

(c) Dalla soluzione del punto precedente è immediato ricavare:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda\,, \qquad \varphi\,' = \varphi - \frac{1}{c}\,\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\,.$$