Fisica Teorica (Parte B): II prova scritta in itinere del 21/1/2014

Salvo diverso avviso, si possono usare risultati discussi a lezione senza dimostrarli. Le risposte ai quesiti devono essere però giustificate, riportando i passaggi essenziali della loro derivazione.

1.

(a) Considerata una soluzione $\psi(x)$ dell'equazione di Dirac libera per $0 < m \in R$, si calcolino

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\right] \equiv \partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\overline{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x)\right] \equiv \partial_\mu(\overline{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi)$$

eliminando le derivate e semplificando per quanto possibile. Si ricordi che $\gamma_5 = -i\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

(b) Indicata con

$$\psi^{(r)}_{+,\vec{p}}(x) = u^{(r)}(\vec{p})\,e^{-ip\cdot x} \qquad \psi^{(r)}_{-,\vec{p}}(x) = v^{(r)}(\vec{p})\,e^{ip\cdot x} \qquad (r = 1, 2)$$

una base di soluzioni di tipo onda piana ad impulso definito $\vec{p}$, con $p^0 = \omega_{\vec{p}} \equiv +\sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}}$ e soddisfacenti le condizioni di ortonormalizzazione

$$u^{(r)\,\dagger}(\vec{p})\,u^{(s)}(\vec{p}) = v^{(r)\,\dagger}(\vec{p})\,v^{(s)}(\vec{p}) = \frac{\omega_{\vec{p}}}{m}\,\delta^{rs}$$

si scriva esplicitamente una possibile scelta $[\psi^{(1)}_{+,\vec{0}}(x), \psi^{(2)}_{+,\vec{0}}(x), \psi^{(1)}_{-,\vec{0}}(x), \psi^{(2)}_{-,\vec{0}}(x)]$ di tali soluzioni, nel caso particolare $\vec{p} = 0$ e nella rappresentazione di Dirac delle matrici γ:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Si motivi la risposta oppure la si verifichi a posteriori.

(c) Indicata con

$$\psi_+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{\omega_{\vec{p}}}\sum_{r=1}^{2}\left[b_r(\vec{p})\,u^{(r)}(\vec{p})\,e^{-ip\cdot x}\right]_{p^0=\omega_{\vec{p}}}$$

la generica sovrapposizione di soluzioni dell'equazione di Dirac ad energia positiva, ed assumendo la condizione di ortonormalizzazione di cui sopra, si semplifichi quanto più possibile l'integrale:

$$P = \int d^3x\,\psi_+^\dagger(x)\,\psi_+(x)$$

(... continua alla pagina seguente ...)

2.

(a) Si ricordi la formula generale che esprime, per la diffusione elastica non-relativistica di un particella senza spin da un potenziale $V(\vec{r})$, la sezione d'urto totale σ_T in termini dell'ampiezza di scattering $f_k(\theta, \varphi)$. La derivazione non è richiesta. Che cosa rappresentano k, θ e φ nell'espressione $f_k(\theta, \varphi)$?

(b) Perché, nel caso della diffusione elastica di una particella senza spin da un potenziale centrale $V(r)$ e per un'opportuna scelta delle coordinate, l'ampiezza di scattering dipende solo da θ? Una risposta qualitativa sintetica è sufficiente.

La possibilità di assorbimento nella diffusione da un potenziale centrale viene parametrizzata fenomenologicamente scrivendo l'espansione dell'ampiezza di scattering in onde parziali come

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)}\, Y_l^{\,0}(\theta)\, \frac{\eta_l - 1}{2i} \qquad \eta_l = e^{2i\,\delta_l} \qquad \delta_l \in \mathbf{C} \qquad |\eta_l| < 1$$

dove $Y_l^{\,0}(\theta)$ sono le armoniche sferiche con $m = 0$ nella normalizzazione adottata nel corso.

(c) In che limite l'espressione precedente riproduce quella valida per lo scattering elastico (senza assorbimento)? Basta la risposta.

(d) Si esprima la sezione d'urto totale elastica $\sigma_{T,el}$ in funzione di η_l, semplificandola per quanto possibile. I passaggi essenziali della derivazione sono richiesti.

3.

Si considerino l'oscillatore armonico isotropo bidimensionale, di Hamiltoniano quantistico

$$H = \hbar\omega\, \left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1\right) = \hbar\omega\, (N_1 + N_2 + 1)$$

dove

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \qquad [N_i, a_j] = -\delta_{ij}\, a_j \quad [N_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}\, a_j^\dagger \qquad (i, j = 1, 2)$$

e gli operatori hermitiani

$$T_1 = \frac{\hbar}{2}\left(a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2\right) \quad T_2 = \frac{i\,\hbar}{2}\left(a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2\right) \quad T_3 = \frac{\hbar}{2}\left(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2\right) = \frac{\hbar}{2}\,(N_1 - N_2)$$

(a) Si identifichino gli autovalori e gli autovettori dell'Hamiltoniano corrispondenti ai tre livelli energetici più bassi, menzionando esplicitamente la degenerazione nei tre casi. Basta la risposta.

(b) Si calcoli $T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2$ e lo si esprima, se possibile, in termini di N_1 e N_2.

(c) Si calcoli il commutatore $[H, T_1]$, semplificando il risultato per quanto possibile.

(d) Si calcoli il commutatore $[T_3, T_1]$ e lo si esprima in funzione di (T_1, T_2, T_3).

(e) Si discuta la degenerazione dello spettro in termini di simmetrie dinamiche [è consentito indovinare i valori di $[H, T_\alpha]$ e $[T_\alpha, T_\beta]$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ senza calcolarli tutti esplicitamente].

Soluzioni (versione A)

1

(a)

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = m\psi \quad \Rightarrow \quad \gamma^\mu\partial_\mu\psi = -im\psi \quad \& \quad (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu = im\overline{\psi}$$

$$\partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi) = (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi + \overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = im\overline{\psi}\psi - im\overline{\psi}\psi = 0$$

$$\partial_\mu(\overline{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi) = (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma_5\gamma^\mu\psi + \overline{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi = -(\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\gamma_5\psi + \overline{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi = -2im\overline{\psi}\gamma_5\psi$$

Il primo risultato si può anche ottenere sinteticamente riconoscendo che $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ è la corrente“conservata” associata all’invarianza dell’azione di Dirac per trasformazioni globali di fase.

(b) Per $\vec{p} = 0$, abbiamo che $\omega_{\vec{p}} = m$, $e^{-ip\cdot x} = e^{-imx^0}$, $e^{ip\cdot x} = e^{imx^0}$ e:

$$0 = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^{(r)}_{+,\vec{0}} = m(\gamma^0 - 1)\psi^{(r)}_{+,\vec{0}} = -2m\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\psi^{(r)}_{+,\vec{0}}$$

$$0 = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^{(r)}_{-,\vec{0}} = -m(\gamma^0 + 1)\psi^{(r)}_{-,\vec{0}} = -2m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\psi^{(r)}_{-,\vec{0}}$$

dunque una possibile base soddisfacente le condizioni richieste è:

$$\psi^{(1)}_{+,\vec{0}}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imx^0} \qquad \psi^{(2)}_{+,\vec{0}}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imx^0}$$

$$\psi^{(1)}_{-,\vec{0}}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{imx^0} \qquad \psi^{(2)}_{-,\vec{0}}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imx^0}$$

(c)

$$\psi^\dagger_+(x) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{\omega_{\vec{k}}}\sum_{s=1}^{2}\left[b^*_s(\vec{k})\,u^{(s)\,\dagger}(\vec{k})\,e^{ik\cdot x}\right]_{k^0=\omega_{\vec{k}}}$$

Tenendo conto delle condizioni di ortonormalizzazione date nel testo:

$$P = \int d^3x\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{\omega_{\vec{k}}}\frac{m}{\omega_{\vec{p}}}\sum_{r,s=1}^{2}\left[b^*_s(\vec{k})\,u^{(s)\,\dagger}(\vec{k})\,e^{ik\cdot x}\right]_{k^0=\omega_{\vec{k}}}\left[b_r(\vec{p})\,u^{(r)}(\vec{p})\,e^{-ip\cdot x}\right]_{p^0=\omega_{\vec{p}}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6}\int d^3x\int d^3k\int d^3p\frac{m}{\omega_{\vec{k}}}\frac{m}{\omega_{\vec{p}}}\sum_{r,s=1}^{2}\left[b^*_s(\vec{k})\,b_r(\vec{p})\,u^{(s)\,\dagger}(\vec{k})\,u^{(r)}(\vec{p})\,e^{i(\omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{p}})\cdot x^0}e^{-i(\vec{k}-\vec{p})\cdot\vec{x}}\right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\int d^3p\frac{m}{\omega_{\vec{k}}}\frac{m}{\omega_{\vec{p}}}\sum_{r,s=1}^{2}\left[b^*_s(\vec{k})\,b_r(\vec{p})\,u^{(s)\,\dagger}(\vec{k})\,u^{(r)}(\vec{p})\,e^{i(\omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{p}})\cdot x^0}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{p})\right] =$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega_{\vec{p}}^2} \sum_{r,s=1}^{2} \left[b_s^*(\vec{p})\, b_r(\vec{p})\, u^{(s)\,\dagger}(\vec{p})\, u^{(r)}(\vec{p}) \right] =$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_{\vec{p}}} \sum_{r,s=1}^{2} [b_s^*(\vec{p})\, b_r(\vec{p})\, \delta^{rs}] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_{\vec{p}}} \sum_{r=1}^{2} |b_r(\vec{p})|^2$$

2

(a) k è associato all'energia $E > 0$ dello stato stazionario di scattering, che coincide con l'energia cinetica delle particelle incidenti e diffuse a distanze sufficientemente grandi dal bersaglio, dalla relazione non-relativistica $E = \hbar^2\, k^2/(2\,\mu)$, dove μ è la massa della particella diffusa. In altre parole, k è il numero d'onda associato alle particelle incidenti e diffuse al di fuori del tipico raggio di azione del potenziale. θ e φ sono gli angoli polare e azimutale di un sistema di coordinate polari sferiche in cui l'asse z è parallelo e concorde al fascio di particelle incidente.

(b) L'Hamiltoniano $H = \vec{P}^{\,2}/(2\,\mu) + V(r)$ associato ad un potenziale centrale è invariate per rotazioni spaziali. Il fascio incidente individua una direzione orientata privilegiata, quella dell'asse z, corrispondente a $\theta = 0$, ma non discrimina tra i diversi valori di φ perchè rimane una residua simmetria cilindrica per rotazioni attorno all'asse z. Dunque, l'ampiezza di scattering non può dipendere da φ.

(c) La diffusione puramente elastica si recupera richiedendo $\delta_l \in \mathbf{R}$, che implica $|\eta_l| = 1$.

(d)

$$\sigma_{T,el} = \int d\Omega\, |f_k(\theta)|^2 = \frac{1}{4k^2} \int d\Omega \sum_{l,l'=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)}\, \sqrt{4\pi(2l'+1)}\, [Y_l{}^0(\theta)]^*\, Y_{l'}{}^0(\theta)\, (\eta_l^* - 1)\, (\eta_{l'} - 1) =$$

$$= \frac{1}{4k^2} \sum_{l,l'=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)}\, \sqrt{4\pi(2l'+1)}\, \delta_{ll'}\, (\eta_l^* - 1)\, (\eta_{l'} - 1) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, |1 - \eta_l|^2$$

3.

(a) Come si è visto a lezione, autovalori ed autovettori sono della forma

$$E_n = \hbar\omega(n+1) \qquad |n_1, n_2\rangle \qquad\qquad (n = n_1 + n_2;\;\; n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots)$$

dunque per i primi tre livelli energetici:

$$\begin{array}{rcc} E_0 = \hbar\omega & \{|0,0\rangle\} & deg = 1 \\ E_1 = 2\hbar\omega & \{|1,0\rangle, |0,1\rangle\} & deg = 2 \\ E_2 = 3\hbar\omega & \{|2,0\rangle, |1,1\rangle, |0,2\rangle\} & deg = 3 \end{array}$$

(b)

$$T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left[(a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2)^2 - (a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2)^2 + (N_1 - N_2)^2\right] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\left[2a_2^\dagger a_1 a_1^\dagger a_2 + 2a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger a_1 + (N_1 - N_2)^2\right] = \frac{\hbar^2}{4}\left[2(N_1 + N_2) + 4N_1N_2 + (N_1 - N_2)^2\right] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\left[2(N_1 + N_2) + (N_1 + N_2)^2\right] = \hbar^2\left[\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}\right)^2\right] = \hbar^2\;\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2} + 1\right)$$

(c)

$$[H, T_1] = \frac{\hbar^2\omega}{2}[N_1{+}N_2{+}1, a_2^\dagger a_1{+}a_1^\dagger a_2] = \frac{\hbar^2\omega}{2}\Big([N_1, a_2^\dagger a_1] + [N_2, a_2^\dagger a_1] + [N_1, a_1^\dagger a_2] + [N_2, a_1^\dagger a_2]\Big) =$$

$$= \frac{\hbar^2\omega}{2}\Big(-a_2^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_2\Big) = 0 \qquad \text{(oppure via} \quad [N_1, T_1] = i\,T_2 \quad [N_2, T_1] = -i\,T_2)$$

(d)

$$[T_3, T_1] = \frac{\hbar^2}{4}[N_1 - N_2, a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2] = \frac{\hbar^2}{4}\Big([N_1, a_2^\dagger a_1] + [N_1, a_1^\dagger a_2] - [N_2, a_2^\dagger a_1] - [N_2, a_1^\dagger a_2]\Big) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\Big(-a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2\Big) = \frac{\hbar^2}{2}\Big(a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1\Big) = i\,\hbar\,T_2$$

(e) Sarebbe facile verificare che $[H, T_\alpha] = 0$ e $[T_\alpha, T_\beta] = i\,\hbar\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}T_\gamma$, ovvero che (T_1, T_2, T_3) sono quantità conservate e generano l'algebra di Lie del gruppo $SU(2)$. Dall'espressione trovata per T^2 si vede che sia H che T^2 sono funzioni di $N = N_1 + N_2$, e che gli autovalori di T^2 associati al numero intero n hanno la forma di quelli del quadrato di un momento angolare, $\hbar^2\,l\,(l+1)$, a condizione di porre $l = 2n$. Allora si può vedere che (H, T_3) costituiscono un sistema completo di osservabili compatibili, che spiega la degenerazione $deg = (2l{+}1) = n{+}1$ dei livelli energetici, corrispondente agli autovalori di T_3 dati da $m\,\hbar$, con $-l \leq m \leq +l$, ovvero $-n/2 \leq m \leq n/2$.