Esercizi di Fisica Teorica (Parte B): foglio n.1 – a.a.2013-4

1. Operatori unitari

Si consideri un operatore unitario U definito in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$:

$$\langle U\,\psi | U\,\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle \qquad \forall|\psi\rangle\,,\,|\phi\rangle \in \mathcal{H}$$

(a) Si dimostri che U è invertibile.

(b) Si dimostri che U è lineare.

2. Autovalori ed autovettori di operatori unitari

Si dimostri che, se U è un operatore unitario:

(a) gli autovalori di U hanno modulo uno;

(b) due autovettori relativi ad autovalori diversi sono ortogonali.

3. Principio di indeterminazione generalizzato

Se A è un operatore autoaggiunto e $|\psi\rangle$ un vettore di stato, si denotino valor medio e fluttuazione quadratica media di A in tale stato con

$$\langle A\rangle \equiv \frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\,, \qquad \sigma_A^2 \equiv \frac{\langle\psi|(A-\langle A\rangle)^2|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\,.$$

Si dimostri che, indicato con

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$$

l'Hamiltoniano totale per una particella unidimensionale con analogo classico, si ha

$$\sigma_X\;\sigma_H \geq \frac{\hbar}{2m}\,|\langle P\rangle|\,.$$

Suggerimento:

Si dimostri dapprima il principio di indeterminazione generalizzato per $A = A^\dagger$ e $B = B^\dagger$:

$$\sigma_A\;\sigma_B \geq \frac{1}{2}\,|\langle\,[A\,,\,B]\,\rangle|\,.$$

4. Operatori posizione ed impulso

Si consideri una particella con analogo classico nello spazio tridimensionale $\mathbf{R}^3$, con gli operatori posizione X^α $(\alpha = 1,2,3)$ ed impulso P_α $(\alpha = 1,2,3)$ che obbediscono alle relazioni di commutazione canoniche:

$$[X^\alpha \, , \, X^\beta] = [P_\alpha \, , \, P_\beta] = 0 \, , \quad [X^\alpha \, , \, P_\beta] = i \, \hbar \, \delta^\alpha_\beta \, .$$

Si definisca l'azione degli operatori $\vec{X}$ e $\vec{P}$ sulla funzione d'onda $\psi(\vec{x})$ nel modo seguente (lasciando implicite tutte le questioni legate ai domini degli operatori) :

$$X^\alpha \, \psi(\vec{x}) = x^\alpha \, \psi(\vec{x}) \, , \qquad P_\alpha \, \psi(\vec{x}) = -i \, \hbar \, \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \, \psi(\vec{x}) + \hbar \, f_\alpha(\vec{x}) \, \psi(\vec{x}) \, ,$$

dove le $f_\alpha(\vec{x})$ sono funzioni derivabili delle coordinate.
(a) Si determinino le condizioni cui debbono soddisfare le funzioni $f_\alpha(\vec{x})$ perché le relazioni di commutazione canoniche siano soddisfatte, tenendo presente che lo sono per la scelta convenzionale $f_\alpha(\vec{x}) = 0$.
(b) Si dimostri che è sempre possibile arrivare alla scelta convenzionale $f_\alpha(\vec{x}) = 0$ con una trasformazione unitaria.

5. Particella libera in visuale di Heisenberg

Si consideri una particella libera di massa m con analogo classico, nel caso semplice di una sola dimensione spaziale. Indicati con X_S e P_S gli operatori posizione ed impulso in visuale di Schrödinger (coincidente con la visuale di Heisenberg all'istante t_0), si ricavino i corrispondenti operatori $X_H(t)$ e $P_H(t)$ in visuale di Heisenberg al generico istante t.