Esercizi di Fisica Teorica (Parte B): foglio n.10 – a.a. 2013-4

46. Trasformazioni di Lorentz per gli spinori di Dirac

Sfruttando l'algebra di Dirac,

$$\{\gamma^\mu\,,\,\gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu}\,,$$

ma senza ricorrere ad una rappresentazione esplicita, si mostri che le matrici

$$\Sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}\,[\gamma^\mu\,,\,\gamma^\nu]$$

verificano l'algebra di Lie del gruppo di Lorentz:

$$[\Sigma^{\mu\nu}\,,\,\Sigma^{\rho\sigma}] = i\,\left(\eta^{\nu\rho}\,\Sigma^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\rho}\,\Sigma^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\rho}\,\Sigma^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\rho}\,\Sigma^{\mu\sigma}\right)\,.$$

Suggerimento: si dimostri e sfrutti il risultato intermedio

$$[\Sigma^{\mu\nu}\,,\,\gamma^\rho] = i\,\left(\gamma^\mu\eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu\eta^{\mu\rho}\right)\,.$$

47. Proprietà delle matrici gamma

Mostrare che dalla sola algebra di Dirac

$$\{\gamma^\mu\,,\,\gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu}\,,$$

e dalla definizione

$$\gamma^5 = -i\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3\,,$$

seguono le proprietà:

$$\left(\gamma^0\right)^2 = 1_4\,,$$

$$\left(\gamma^i\right)^2 = -1_4\,,\quad (i = 1,2,3)\,,$$

$$tr\,\gamma^\mu = 0\,,\quad (\mu = 0,1,2,3)\,,$$

$$\left(\gamma^5\right)^2 = 1_4\,,$$

$$\left\{\gamma^5\,,\,\gamma^\mu\right\} = 0\,.$$

48. Simmetria chirale

Nel caso di massa nulla ($m = 0$), l'azione classica del campo di Dirac libero è invariante per due trasformazioni di fase indipendenti, ad esempio:

$$\psi'_L = e^{-i\,\alpha_L}\ \psi_L\,, \qquad \psi'_R = e^{-i\,\alpha_R}\ \psi_R\,,$$

dove α_L ed α_R sono due costanti reali indipendenti. Determinare le correnti j_L^μ e j_R^μ associate alle due invarianze classiche di cui sopra. Determinare a quali combinazioni lineari di j_L^μ e j_R^μ corrispondono le due correnti $j_V^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ e $j_A^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$. Calcolare esplicitamente, per le soluzioni dell'equazione di Dirac libera con $m \neq 0$, $\partial_\mu j_V^\mu$ e $\partial_\mu j_A^\mu$.

49. Corrente vettoriale

Pur sapendo che ciò è garantito dal teorema di Noether nel caso di un'azione relativisticamente invariante, verificare che la corrente $j_V^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ trasforma come un campo quadrivettoriale a partire dalle proprietà di trasformazione degli spinori di Dirac.

50. Hermiticità di Lagrangiana ed azione di Dirac

Mostrare che la densità di Lagrangiana dell'equazione di Dirac libera, nella forma

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\,\gamma^\mu\,\partial_\mu - m)\psi\,,$$

non è hermitiana, mentre lo è invece la corrispondente azione se i campi hanno un opportuno comportamento all'infinito.