Esercizi di Fisica Teorica (Parte B): foglio n.11 – a.a. 2013-4

51. Spinori di base per le soluzioni dell'equazione di Dirac con $\vec{k} \neq 0$

Si considerino, nella rappresentazione di Dirac delle matrici γ, gli spinori ($\alpha = 1, 2$)

$$u^{(\alpha)}(\vec{k}) = \frac{\not{k} + m}{\sqrt{2m(m + \omega_{\vec{k}})}}\, u^{(\alpha)} \qquad\qquad v^{(\alpha)}(\vec{k}) = \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{2m(m + \omega_{\vec{k}})}}\, v^{(\alpha)}$$

dove

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sfruttando i risultati ottenuti a lezione, in particolare il fatto che (per $k^0 = \omega_{\vec{k}}$)

$$\Lambda_+(\vec{k}) = \frac{\not{k} + m}{2m} \qquad\qquad \Lambda_-(\vec{k}) = \frac{-\not{k} + m}{2m}$$

sono un sistema completo di proiettori ortogonali nello spazio delle soluzioni dell'equazione di Dirac, si mostri che gli spinori $u^{(\alpha)}(\vec{k})$ e $v^{(\alpha)}(\vec{k})$ risolvono la corrispondente equazione di Dirac e si riducono rispettivamente agli $u^{(\alpha)}$ e $v^{(\alpha)}$ nel limite $\vec{k} \to 0$. Si calcolino inoltre le espressioni esplicite degli $\overline{u}^{(\alpha)}$ e $\overline{v}^{(\alpha)}$, ed infine si esprimano gli $\overline{u}^{(\alpha)}(\vec{k})$ e $\overline{v}^{(\alpha)}(\vec{k})$ in termini degli $\overline{u}^{(\alpha)}$ e $\overline{v}^{(\alpha)}$.

52. Condizioni di normalizzazione degli spinori di base

Si dimostri che, con le convenzioni utilizzate a lezione:

$$\begin{array}{ll}
(i) & \overline{u}^{(\alpha)}(\vec{k})\; u^{(\beta)}(\vec{k}) = \delta_{\alpha\beta}\,, \\
(ii) & \overline{v}^{(\alpha)}(\vec{k})\; v^{(\beta)}(\vec{k}) = -\delta_{\alpha\beta}\,, \\
(iii) & \overline{u}^{(\alpha)}(\vec{k})\; v^{(\beta)}(\vec{k}) = 0\,, \\
(iv) & \overline{v}^{(\alpha)}(\vec{k})\; u^{(\beta)}(\vec{k}) = 0\,, \\
(v) & u^{(\alpha)\,\dagger}(\vec{k})\; u^{(\beta)}(\vec{k}) = v^{(\alpha)\,\dagger}(\vec{k})\; v^{(\beta)}(\vec{k}) = \dfrac{\omega_{\vec{k}}}{m}\;\delta_{\alpha\beta}\,.
\end{array}$$

53. Bilineari fermionici e proiezioni chirali

Sia ψ uno spinore di Dirac. Si decomponga il bilineare $\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ in termini delle proiezioni chirali $\psi_L = P_L\,\psi = [(1+\gamma^5)/2]\psi$ e $\psi_R = P_R\,\psi = [(1-\gamma^5)/2]\psi$, con $\gamma^5 = -i\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$:

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi = a\,\overline{\psi_L}\gamma^\mu\gamma^5\psi_L + b\,\overline{\psi_R}\gamma^\mu\gamma^5\psi_R + c\,\overline{\psi_L}\gamma^\mu\gamma^5\psi_R + d\,\overline{\psi_R}\gamma^\mu\gamma^5\psi_L\,,$$

esplicitando i coefficienti e semplificando quanto più possibile il risultato.

54. I proiettori $\Lambda_\pm$ in termini degli spinori di base

Nelle convenzioni utilizzate a lezione e nell'esercizio 51, si dimostrino le seguenti identità:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} u^{(\alpha)}(\vec{k})\,\overline{u}^{(\alpha)}(\vec{k}) = \Lambda_+(\vec{k}) \qquad\qquad \sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(\vec{k})\,\overline{v}^{(\alpha)}(\vec{k}) = -\Lambda_-(\vec{k})$$

Suggerimento: La covarianza dell'equazione di Dirac consente di limitare la dimostrazione al caso $\vec{k}=0$. *Altrimenti si dimostrino e si sfruttino le relazioni* $(\not{k} \pm m)\gamma^0(\not{k} \pm m) = 2\omega_{\vec{k}}(\not{k} \pm m)$.

55. Elicità e chiralità nel limite ultra-relativistico

Si consideri una soluzione dell'equazione di Dirac libera ad impulso definito $\vec{k}$. Si dimostri che, nel limite ultra-relativistico $|\vec{k}|^2 \gg m^2$, l'elicità $h = (\vec{k}\cdot\vec{S})/|\vec{k}|$ equivale alla chiralità, facendo vedere che, per $m=0$, ψ_L e ψ_R sono autostati dell'elicità e determinando i corrispondenti autovalori. *Suggerimento: si trovi la relazione tra* $\gamma^5\gamma^0\not{k}$ *e l'elicità, e si indichi per brevità con* $\psi(\vec{k})$ *la soluzione considerata.*