Esercizi di Fisica Teorica (Parte B): foglio n.2 – a.a.2013-4

6. Visuale di Dirac (o di interazione)

Si assuma che, in visuale di Schrödinger, l'Hamiltoniano totale si possa decomporre in una parte "libera" ed una "di interazione", $H_S = H_S^{(0)} + H_S^{(int)}$. Si definisca la visuale di Dirac, o visuale di interazione, a partire dalla visuale di Schrödinger mediante la seguente trasformazione unitaria sul generico vettore di stato $|\psi_S(t)\rangle$ e sul generico operatore $\mathcal{O}_S$ indipendente dal tempo :

$$|\psi_D(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} H_S^{(0)} t} |\psi_S(t)\rangle \,, \qquad \mathcal{O}_D(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_S^{(0)} t} \mathcal{O}_S \, e^{-\frac{i}{\hbar} H_S^{(0)} t} \,.$$

Dopo aver osservato che le due visuali coincidono all'istante $t = 0$, e che la parte libera dell'Hamiltoniano coincide nelle due visuali, per cui non è restrittivo indicarla semplicemente con $H^{(0)}$ in entrambe, si derivino le equazioni differenziali per l'evoluzione di vettori di stato ed operatori nella visuale di Dirac.

7. Equazione di Heisenberg per operatori dipendenti dal tempo.

Si consideri un operatore $\mathcal{O}_S(t)$ con una dipendenza esplicita dal tempo in visuale di Schrödinger. Immaginando di avere a che fare con un sistema conservativo descritto da un Hamiltoniano H indipendente dal tempo, ed indicato con $\mathcal{O}_H(t) = U^\dagger \, \mathcal{O}_S(t) \, U$ il corrispondente operatore in visuale di Heisenberg, dove $U = \exp[-(i/\hbar) \, t \, H]$, si derivi l'equazione di Heisenberg per $d\mathcal{O}_H(t)/dt$.

8. Prodotto cronologico

Si consideri l'integrale doppio

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \, H(t_1) \, H(t_2) \,,$$

che interviene nella costruzione iterativa dell'operatore di evoluzione temporale nel caso di un Hamiltoniano totale $H(t)$ dipendente dal tempo, ed assume implicitamente l'ordinamento $t_0 < t_2 < t_1 < t$. Introdotto il prodotto cronologico

$$T \, H(t_1) \, H(t_2) = \theta(t_1 - t_2) \, H(t_1) \, H(t_2) + \theta(t_2 - t_1) \, H(t_2) \, H(t_1) \,,$$

si dimostri che

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \, H(t_1) \, H(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \, T \, H(t_1) \, H(t_2) \,.$$

9. Teorema del viriale

Si consideri una particella unidimensionale con analogo classico di Hamiltoniano $H = T + V(X)$, dove $T = P^2/(2m)$ è l'energia cinetica. Si dimostri che

$$\frac{d}{dt}\langle X\, P\rangle = 2\,\langle T\rangle - \langle X\, V'(X)\rangle\,,$$

dove le parentesi angolose indicano i valori medi nel generico stato quantistico. Si dimostri poi che per gli stati stazionari dell'oscillatore armonico semplice unidimensionale è $\langle T\rangle = \langle V(X)\rangle$.

10. Stati coerenti dell'oscillatore armonico

Si chiamano *stati coerenti* dell'oscillatore armonico unidimensionale gli autostati dell'operatore di distruzione (non-Hermitiano) a,

$$a\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle\,,$$

dove gli autovalori λ sono in generale numeri complessi.

(a) Si dimostri che

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2}\, e^{\lambda\, a^\dagger}\,|0\rangle$$

è uno stato coerente normalizzato.

(b) Si dimostri che la relazione di indeterminazione è saturata come eguaglianza in tale stato. *Suggerimento: si osservi che, posto $\widehat{Q} = Q - \langle Q\rangle$ e $\widehat{P} = P - \langle P\rangle$, la relazione di indeterminazione $\sigma_Q\ \sigma_P \geq \hbar/2$ è saturata nello stato ψ se $\widehat{Q}|\psi\rangle = c\ \widehat{P}|\psi\rangle$, con c immaginario puro.*

(c) Posto

$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,|n\rangle\,,$$

si mostri che la distribuzione di $|f(n)|^2$ rispetto a n ha la forma di Poisson, e si trovi il valore più probabile di n, ovvero di E.

(d) Si mostri che lo stato coerente $|\lambda\rangle$, assegnato all'istante $t = 0$, rimane coerente durante l'evoluzione temporale (in visuale di Schrödinger) e si calcoli lo stato $|\lambda(t)\rangle$ al generico istante t.