

11. Perturbazione anarmonica dell'oscillatore armonico

Si consideri il sistema descritto dall'Hamiltoniano

$$H = H_0 + W, \quad H_0 = \frac{\hbar\omega}{2}(p^2 + q^2), \quad W = \sigma\hbar\omega q^3,$$

dove σ è un parametro reale 'piccolo' e $[q, p] = i$. Applicando il metodo perturbativo, si calcolino gli autovalori di H al second'ordine e gli autovettori di H al primo ordine.

12. Perturbazione di un sistema a tre stati con un autovalore degenere

Un sistema a tre stati può essere rappresentato dall'Hamiltoniana $H = H_0 + \lambda V$, con

$$H = V_0 \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 2 \end{pmatrix}, \quad H_0 = V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad V = V_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove V_0 e λ sono due costanti assegnate reali e positive, con $\lambda \ll 1$.

- (a) Si determinino gli autovalori esatti di H .
- (b) Si applichi la teoria delle perturbazioni per calcolare le correzioni fino al second'ordine all'autovalore non degenere di H_0 , fino al prim'ordine all'autovalore degenere.
- (c) Si confrontino i risultati perturbativi con il risultato esatto, nell'ambito delle approssimazioni fatte.

Per fissare la notazione, si prenda come base ortonormale di autovettori di H_0 la seguente:

$$|I^{(0)}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |II^{(0)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |III^{(0)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

13. Stato fondamentale di un atomo idrogenoide

Sia ψ_0 lo stato fondamentale di un atomo idrogenoide con nucleo di carica Ze , associato alla funzione d'onda:

$$\psi_0(r) = \left(\frac{Z^3}{\pi a_0^3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{Zr}{a_0}}$$

Ricordato che l'Hamiltoniano è

$$H = H_{kin} + H_{pot} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}$$

si calcolino i valori medi sullo stato fondamentale degli operatori associati all'energia cinetica ed all'energia potenziale. *Suggerimento: si ricordi la funzione Gamma di Eulero*

$$\int_0^\infty dx x^n e^{-\alpha x} = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

14. Interazione tra gli elettroni nell'atomo di elio

Trascurando il termine di interazione coulombiana tra i due elettroni

$$V_{ee} = \frac{e^2}{r_{12}} \quad (r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

l'Hamiltoniano $H = H_0 + V_{ee}$ dell'atomo di elio è semplicemente

$$H_0 = \left(\frac{\vec{p}_1^2}{2m} - \frac{2e^2}{r_1} \right) + \left(\frac{\vec{p}_2^2}{2m} - \frac{2e^2}{r_2} \right)$$

e lo stato fondamentale si può approssimare con la funzione d'onda

$$\psi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{Z^3}{\pi a_0^3} e^{-\frac{Z(r_1+r_2)}{a_0}}, \quad (Z = 2).$$

Si calcoli il valor medio di V_{ee} nello stato $|\psi_0\rangle$. Si calcoli poi l'energia dello stato fondamentale al primo ordine perturbativo, trattando H_0 come Hamiltoniano imperturbato e V_{ee} come perturbazione, e si confronti il risultato con quello ottenuto a lezione con il metodo variazionale.

15. Applicazione del metodo variazionale all'oscillatore armonico unidimensionale

Si consideri l'oscillatore armonico unidimensionale, di Hamiltoniano:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Si applichi il metodo variazionale per stimare l'energia dello stato fondamentale, prendendo come classe di funzioni d'onda di prova la seguente:

$$\psi_\alpha(x) = -e^{-\alpha x^2} \quad (\alpha > 0)$$

Si confronti il risultato ottenuto con quello esatto.