**Esercizi di Fisica Teorica (Parte B): foglio n.4 – a.a. 2013-4**

### 16. Formula di Rabi

Si consideri un sistema a due stati, con Hamiltoniano $H = H_0 + V(t)$, dove

$$H_0 = E_1 \,|1\rangle\langle 1| + E_2 \,|2\rangle\langle 2| \,, \qquad V(t) = \gamma\, e^{i\,\omega\, t} \,|1\rangle\langle 2| + \gamma\, e^{-i\,\omega\, t} \,|2\rangle\langle 1| \,,$$

$\gamma$ e $\omega$ sono due costanti reali positive, $E_2 > E_1$. All'istante iniziale $t_0 = 0$ il vettore di stato è $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Si calcoli la probabilità che il sistema sia in ciascuno dei due stati $|1\rangle$ e $|2\rangle$ al generico istante successivo $t$, confrontando la soluzione esatta con quella ottenuta applicando il metodo perturbativo al primo ordine.

### 17. Perturbazioni dipendenti dal tempo

Nella notazione adottata a lezione, dato un sistema con Hamiltoniano $H = H_0 + V(t)$ e vettore di stato $|\psi(t)\rangle_S = \sum_a c_a(t)\, e^{-\frac{i}{\hbar} E_a\, t}\, |a\rangle$, i coefficienti $c_a(t)$ soddisfano le equazioni:

$$i\,\hbar\, \frac{d}{dt} c_b(t) = \sum_a W_{ba}(t)\, c_a(t)\,, \qquad W_{ba}(t) = e^{i\,\omega_{ba}\, t}\, V_{ba}(t)\,. \tag{1}$$

Assumendo che a $t_0 = 0$ il sistema si trovi nell'autostato $|a\rangle$ di $H_0$, si ricavi il generico coefficiente $c_b(t)$ al second'ordine perturbativo, direttamente da (1).

### 18. Perturbazioni armoniche e costanti, I

Sia $H = H_0 + V(t)$, con $V(t) = V_0\,(e^{i\,\omega\, t} + e^{-i\,\omega\, t})$ e $\omega \geq 0$. Si ricordi l'espressione perturbativa al primo ordine per la probabilità di transizione dall'autostato $|i\rangle$ (all'istante $t_0 = 0$) all'autostato $|f\rangle \neq |i\rangle$ (all'istante $t > 0$) di $H_0$, con spettro discreto:

$$|c_f(t)|^2 = \frac{|V_{fi}|^2}{\hbar^2} \left| \frac{e^{i\,(\omega_{fi}+\omega)\, t} - 1}{\omega_{fi} + \omega} + \frac{e^{i\,(\omega_{fi}-\omega)\, t} - 1}{\omega_{fi} - \omega} \right|^2 , \tag{2}$$

dove $V_{fi} = \langle f|V_0|i\rangle$ e $V(t=0) = 2\,V_0$ nelle convenzioni adottate. Si consideri il caso limite di perturbazione costante, $\omega = 0$ e $V(t) = 2\,V_0$, nella situazione non risonante $\omega_{fi} \neq 0$.

(a) Si ricavi un'espressione semplice per $|c_f(t)|^2$ in termini di funzioni trigonometriche.

(b) Qual è la media temporale $\overline{|c_f(t)|^2}$ di $|c_f(t)|^2$ per $t \gg (\omega_{fi})^{-1}$?

(c) Qual è la condizione per la validità dell'espressione perturbativa di $\overline{|c_f(t)|^2}$ a $t \gg (\omega_{fi})^{-1}$?

## 19. Perturbazioni armoniche e costanti, II

Si consideri il caso di perturbazione armonica con $\omega > 0$, nel caso risonante $\omega \simeq \omega_{fi}$. Posto

$$A_\pm(\omega, t) = \frac{e^{i\,(\omega_{fi} \pm \omega)\,t} - 1}{\omega_{fi} \pm \omega}\,,$$

ed osservato che $A_-(-\omega, t) = A_+(\omega, t)$, si osservi che l'espressione derivata a lezione per il caso risonante $\omega \simeq \omega_{fi}$ si può riscrivere

$$|c_f(t)|^2 = \frac{|V_{fi}|^2}{\hbar^2}\,|A_+(\omega,t) + A_-(\omega,t)|^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{|V_{fi}|^2}{\hbar^2}\,|A_-(\omega,t)|^2\,,$$

con

$$|A_\pm(\omega,t)|^2 = \left(\frac{\sin\, x_\pm\, t}{x_\pm}\right)^2 = \left(\frac{\sin\, x_\pm\, t}{x_\pm\, t}\right)^2 t^2\,, \qquad x_\pm = \frac{\omega_{fi} \pm \omega}{2}\,.$$

(a) Si discuta la condizione sul tempo $t$ affinché sia $|A_+(\omega,t)| \ll |A_-(\omega,t)|$.

(b) Si mostri che, nel senso delle distribuzioni:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{(\sin\, x\, t)^2}{x^2\, t}\right] = \pi\,\delta(x)\,.$$

(c) Si calcoli quanto vale $|c_f(t)|^2$ alla frequenza di risonanza, e si discuta in che intervallo di tempo il risultato (perturbativo) ottenuto è una buona approssimazione.

(d) Tornando alla soluzione dell'esercizio n.16, e stabilite le corrispondenze $\gamma^2 = |V_{fi}|^2$, $|i\rangle = |1\rangle$, $|f\rangle = |2\rangle$, $\epsilon = \omega_{fi} - \omega$, si calcoli l'espressione esatta per $|c_f(t)|^2$ alla frequenza di risonanza.

## 20. Perturbazione dipendente dal tempo dell'oscillatore armonico

Si consideri il sistema quantistico descritto dall'Hamiltoniano $H = H_0 + V(t)$, dove

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2\,, \qquad V(t) = \lambda\, X\, e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}\,,$$

e $(\lambda, \tau)$ sono parametri reali. Si indichino con $E_n^0 = \hbar\omega(n + 1/2)$ e $|n\rangle$ autovalori ed autovettori normalizzati di $H_0$ ($n = 0, 1, 2 \ldots$). Sia noto che a $t \to -\infty$ il sistema si trova nello stato fondamentale $|0\rangle$ e ci si limiti al primo ordine perturbativo in $V(t)$. Qual è la probabilità $P_{n0}(\infty)$ che a $t \to +\infty$ il sistema si trovi nel generico stato $|n\rangle$ ($n \neq 0$)?