Esercizi di Fisica Teorica (Parte B): foglio n.5 – a.a. 2013-4

21. Buca di potenziale infinita con gradino

Si usi l'approssimazione WKB per determinare gli autovalori E_n dell'Hamiltoniano per una particella quantistica di massa m posta in una buca di potenziale infinita, con un gradino di altezza V_0 che si estende per metà della buca:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & se \quad 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0 & se \quad \frac{a}{2} < x < a \\ \infty & altrimenti \end{cases}$$

Si esprima la risposta in termini di V_0 e degli autovalori dell'energia per la buca a fondo piatto:

$$E_n^0 = \frac{(n\,\pi\,\hbar)^2}{2m\,a^2}\,, \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Si assuma che $E_1^0 > V_0$, senza però assumere che $E_n \gg V_0$. Si confronti il risultato con quello della teoria delle perturbazioni al primo ordine.

22. Derivazione alternativa della formula WKB

Motivati dalle soluzioni di tipo onda piana nel caso di potenziale $V = costante$, si scriva

$$\psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar} f(x)}\,, \qquad\qquad [f(x) \text{ funzione complessa}]\,,$$

che non è restrittivo sulla forma della funzione d'onda.
(a) Si mostri che l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo equivale (sottintendendo la dipendenza da x di f e p, ed indicando con $'$ la derivata rispetto ad x) a:

$$i\,\hbar\,f'' - (f')^2 + p^2 = 0$$

(b) Si espanda $f(x)$ in serie di potenze di $\hbar$:

$$f(x) = f_0(x) + \hbar\,f_1(x) + \hbar^2\,f_2(x) + \ldots$$

e si mostri che, in corrispondenza alle prime potenze di $\hbar$:

$$(f_0')^2 = p^2\,, \qquad i\,f_0'' = 2\,f_0'\,f_1'\,, \qquad i\,f_1'' = 2\,f_0'\,f_2' + (f_1')^2\,, \qquad \ldots$$

(c) Si risolva per $f_0(x)$ e $f_1(x)$, ad esempio nella regione classicamente permessa, e si mostri che, al primo ordine in $\hbar$, si ottiene l'equazione WKB:

$$\psi(x) \simeq \frac{C}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int dx\,p(x)}\,.$$

23. Diffusione da barriera di potenziale rettangolare

Usando l'equazione derivata a lezione per la diffusione da una barriera a pareti verticali di estremi $x_1 < x_2$

$$T \simeq e^{-2\,\gamma}\,, \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2} dx\,|p(x)|\,,$$

si calcoli la probabilità di trasmissione approssimata per una particella di energia E che incontra una barriera di potenziale rettangolare di altezza $V_0 > E$ e di lunghezza $2a$. Si confronti la risposta ottenuta con il risultato esatto e si mostri che sono in accordo nel limite in cui $T \ll 1$.

24. Approssimazione WKB per l'oscillatore armonico

Si usi l'approssimazione WKB per trovare gli autovalori dell'energia dell'oscillatore armonico.

25. Diffusione da barriera con pareti digradanti

Usando le formule di collegamento appropriate, si analizzi il problema della diffusione da una barriera con pareti dolcemente digradanti. *Suggerimento:* Indicati con x_1 e x_2 i punti di transizione ($x_1 < x_2$), si cominci con lo scrivere le funzioni WKB nella forma

$$\psi(x) \simeq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[A\,e^{\frac{i}{\hbar}\int_x^{x_1}dx'\,p(x')} + B\,e^{-\frac{i}{\hbar}\int_x^{x_1}dx'\,p(x')}\right] & (x < x_1) \\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}}\left[C\,e^{\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x}dx'\,|p(x')|} + D\,e^{-\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x}dx'\,|p(x')|}\right] & (x_1 < x < x_2) \\ \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[F\,e^{\frac{i}{\hbar}\int_{x_2}^{x}dx'\,p(x')}\right] & (x > x_2) \end{cases}$$

Non si assuma $C = 0$. Si calcoli la probabilità di tunneling $T = |F|^2/|A|^2$, e si mostri che il risultato si riduce a quello ricavato a lezione e ricordato nell'esercizio 23 nel caso di una barriera larga e alta per cui $T \ll 1$.