Esercizi di Fisica Teorica (Parte B): foglio n.7 – a.a. 2013-4

31. Trasformazioni di Galileo

Si consideri l'operatore unitario

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar}\,(\alpha\, X + \beta\, P)}\,,$$

dove X e P sono gli operatori posizione ed impulso per una particella quantistica in una dimensione. Si determinino i parametri reali α e β in modo da tale da riprodurre per X e P le leggi di trasformazione classiche sotto una trasformazione speciale di Galileo:

$$X' \equiv U\, X\, U^{-1} = X - v\, t\,, \qquad P' \equiv U\, P\, U^{-1} = P - m\, v\,,$$

con ovvio significato di m, v e t. Si ricordi la formula di Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^A e^B = e^{A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] - \frac{1}{12}[B, [A, B]] + \dots}\,.$$

32. Parità

Si definisca l'azione dell'operatore di parità $\mathcal{P}$ sulla funzione d'onda di una particella singola con analogo classico nel modo seguente:

$$\mathcal{P}\psi(\vec{x}) = \eta_P\, \psi(-\vec{x})\,, \qquad (\eta_P = \pm 1)\,.$$

Si dimostri che:
(a) $\mathcal{P}$ è unitario;
(b) $\mathcal{P}^2 = 1$;
(c) $\vec{X}\,' \equiv \mathcal{P}\,\vec{X}\,\mathcal{P}^{-1} = -\vec{X}$;
(d) $\vec{P}\,' \equiv \mathcal{P}\,\vec{P}\,\mathcal{P}^{-1} = -\vec{P}$.

33. Inversione temporale

Sia $\psi(\vec{p}) = \langle \vec{p} | \psi \rangle$ la funzione d'onda nello spazio degli impulsi per una particella singola con analogo classico, corrispondente al vettore di stato $|\psi\rangle$. Se $|\psi\,'\rangle = \mathcal{T}\,|\psi\rangle$ è lo stato trasformato sotto l'inversione temporale, qual è la corrispondente funzione d'onda $\psi\,'(\vec{p}) = \langle \vec{p} | \psi\,' \rangle$? Si scelga tra $\psi(\vec{p})$, $\psi(-\vec{p})$, $\psi^*(\vec{p})$, $\psi^*(-\vec{p})$.

34. Simmetrie dinamiche dell'atomo di idrogeno: considerazioni classiche

Si consideri l'atomo di idrogeno, di Hamiltoniano classico

$$H = \frac{(\vec{p})^2}{2\,\mu} - \frac{e^2}{r}\,.$$

(a) Si derivino le equazioni del moto classiche.
(b) Si verifichi esplicitamente che lungo le soluzioni di tali equazioni del moto sono conservate l'energia H, il momento angolare $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ ed il vettore (classico) di Runge-Lenz,

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{\vec{p} \times \vec{l}}{\mu} - e^2\,\frac{\vec{r}}{r}\,.$$

(c) Si dimostri che $\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{l} = 0$.
(d) Si esprima $\vec{\mathcal{M}}^2$ in funzione di H e di $\vec{l}^{\,2}$.

35. Simmetrie dinamiche dell'atomo di idrogeno: considerazioni quantistiche

Si considerino ora gli operatori quantistici associati all'Hamiltoniano ed al vettore di Runge-Lenz dell'atomo di idrogeno, ponendo per semplicità di notazione $R \equiv |\vec{X}|$:

$$H = \frac{(\vec{P})^2}{2\,\mu} - \frac{e^2}{R}\,, \qquad \vec{M} = \frac{\vec{P} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{P}}{2\,\mu} - e^2\,\frac{\vec{X}}{R}\,.$$

(a) Si calcolino i commutatori $\left[P_i, \frac{1}{R}\right]$, $[M_i, P_j]$ e $\left[M_i, \frac{1}{R}\right]$.
(b) Si calcoli il commutatore $[M_i, M_j]$, esprimendo il risultato in funzione di $\vec{L}$ e di H.
(c) Si dimostri che $\vec{M} \cdot \vec{L} = 0$.
(d) Si esprima $\vec{M}^2$ in funzione di H e di $\vec{L}^2$, confrontando il risultato ottenuto con il caso classico.