Esercizi di Fisica Teorica (Parte B): foglio n.8 – a.a. 2013-4

36. Oscillatore armonico isotropo

Sia $\{|n_1,\, n_2,\, n_3\rangle\}$ una base di autostati dell'Hamiltoniano dell'oscillatore armonico isotropo tridimensionale, $H = \hbar\,\omega\,(N + 3/2)$, dove $N = a_i^\dagger\, a_i$ ed è sottintesa come al solito la somma sugli indici ripetuti. Per ogni matrice 3×3 unitaria W, si consideri l'operatore lineare $U(W)$ definito dalle relazioni:

$$U(W)\ |0,\, 0,\, 0\rangle = |0,\, 0,\, 0\rangle\,, \qquad\qquad U(W)\, a_j^\dagger\, U(W)^{-1} = a_k^\dagger\, W_{kj}\,.$$

(a) Si calcoli $U(W)\,|n_1,\, n_2,\, n_3\rangle$ in termini degli operatori di creazione e di W.

(b) Si dimostri che $U(W')\,U(W) = U(W'\,W)$.

(c) Si dimostri che $\Lambda(\lambda) = a_i^\dagger\,\lambda_{ij}\,a_j$, con λ matrice complessa 3×3, è una costante del moto.

37. Equazione integrale per gli urti elastici

Si verifichi che, nelle ipotesi discusse a lezione, la funzione

$$\phi_k(\vec{r}) = e^{i\,k\,z} + \int d^3r'\, G_+(\vec{r} - \vec{r}\,')\ U(\vec{r}\,')\,\phi_k(\vec{r}\,')\,,$$

dove

$$G_+(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\,k\,r}}{r}$$

è la funzione di Green uscente, ha per $r \to \infty$ il comportamento asintotico

$$\phi_k(\vec{r}) \sim \left[e^{i\,k\,z} + f_k(\theta,\varphi)\ \frac{e^{i\,k\,r}}{r}\right]\,,$$

e si identifichi l'ampiezza di scattering $f_k(\theta,\varphi)$.

38. Funzioni di Green

Si determini una funzione di Green dell'equazione di Helmholtz, ovvero una soluzione di

$$(\nabla^2 + k^2)\, G(\vec{r}) = \delta^3(\vec{r})\,,$$

con il metodo della trasformata di Fourier. Per risolvere i problemi dovuti ai poli sull'asse reale, si esegua un'integrazione di contorno nel piano complesso, sfruttando il teorema dei residui: per ottenere la funzione di Green uscente, si deformi il contorno lungo l'asse reale passando sopra il polo negativo e sotto quello positivo, e lo si richiuda opportunamente all'infinito.

39. Approssimazione di Born per potenziale centrale

Si ricordi l'approssimazione di Born per l'ampiezza di scattering in presenza del generico potenziale $V(\vec{r})$:

$$f_k^B(\theta,\varphi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d^3r\, e^{-i\,\vec{K}\cdot\vec{r}}\,V(\vec{r})\,, \qquad \vec{K} \equiv \vec{k}_{dif} - \vec{k}_{inc}\,.$$

La si semplifichi quanto più possibile nel caso di un potenziale a simmetria sferica $V(r)$.

40. Diffusione da guscio sferico

Si consideri la diffusione di una particella di massa μ da un potenziale a forma di guscio sferico:

$$V(r) = \alpha\;\delta(r-a)\,,$$

dove α e a sono due costanti reali.
(a) Si calcoli l'ampiezza di scattering $f(\theta)$ nell'approssimazione di Born.
(b) Si determini il limite di bassa energia ($ka \ll 1$) del risultato precedente, $\widetilde{f}(\theta) = \lim_{ka\to 0}\, f(\theta)$.
(c) Si calcoli la sezione d'urto totale $\widetilde{\sigma}_T$ nel limite di bassa energia.