Esercizi di Fisica Teorica (Parte B): foglio n.9 – a.a. 2013-4

41. Trasformata di Fourier

Ricordate le definizioni della trasformata di Fourier e della sua inversa nello spazio-tempo quadridimensionale

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, F(k) \, e^{i\, k\cdot x} \qquad\qquad F(k) = \int d^4x \, \varphi(x) \, e^{-i\, k\cdot x}$$

(a) Si calcoli la trasformata di Fourier $\widetilde{\delta}^{(4)}(k)$ della delta di Dirac quadridimensionale $\delta^{(4)}(x)$.

(b) Si verifichi che sostituendo l'espressione di $F(k)$ dell'equazione di destra in quella di $\varphi(x)$ dell'equazione di sinistra si riottiene la funzione $\varphi(x)$ di partenza.

42. Lagrangiana per l'equazione di Schrödinger libera

Si consideri, in unità naturali $\hbar = c = 1$, l'equazione di Schrödinger per la funzione d'onda di una particella libera:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \right) \psi(\vec{x}, t) = 0 \, . \tag{1}$$

a) Se ne scriva la soluzione corrispondente alla condizione iniziale:

$$\psi(\vec{x}, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\kappa \; a(\vec{\kappa}) \; e^{i\, \vec{\kappa}\cdot\vec{x}} \, . \tag{2}$$

b) Si determini la relazione inversa della (2).

c) Si verifichi che una possibile densità di Lagrangiana per l'equazione (1) è:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2m} (\vec{\nabla}\psi^*) \cdot (\vec{\nabla}\psi) + i \, \psi^* \, \frac{\partial \psi}{\partial t} \, .$$

d) Applicando il teorema di Noether, si ricavi la quadricorrente $j^\mu = (\rho, \vec{\jmath})$ che obbedisce all'equazione di continuità $\partial_\mu \, j^\mu = \partial\rho/(\partial t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\jmath} = 0$.

43. Paradosso di Klein (semplificato)

Si consideri un gradino di potenziale, $V(x) = 0$ per $x < 0$ e $V(x) = V_0 > 0$ per $x > 0$. Si utilizzino unità naturali $\hbar = c = 1$. Si supponga di avere una particella relativistica di massa $m > 0$ ed energia totale $E > m$ fissate, con funzione d'onda $\psi(x, t)$. Indicate con (I) e (II) le regioni prima ($x < 0$) e dopo ($x > 0$) il gradino, sia:

$$\psi_I = e^{-iEt + ip_1 x} + A_R\, e^{-iEt - ip_1 x}\,, \qquad \psi_{II} = A_T\, e^{-iEt + ip_2 x}\,.$$

a) Si calcolino p_1 e p_2 in funzione di E, V_0 ed m, in modo tale che la funzione d'onda soddisfi la relazione relativistica tra energia cinetica ed impulso ($E_k = E - V(x)$), con le sostituzioni $E \to i\partial_t$ e $\vec{p} \to -i\vec{\nabla}$.

b) Si calcolino i coefficienti A_T e A_R in funzione di p_1 e p_2.

c) Si discuta la fisica del risultato ottenuto distinguendo fra i seguenti tre casi:

$$(i)\ E - V_0 > m\,; \qquad (ii)\ |E - V_0| < m\,; \qquad (iii)\ E - V_0 < -m\,.$$

In particolare, si confronti con il problema del gradino di potenziale nel caso non-relativistico: quali sono secondo voi il paradosso e la sua spiegazione?

44. Soluzione generale dell'equazione di Klein-Gordon

Si determini la soluzione generale dell'equazione di Klein-Gordon libera, $(\Box + m^2)\,\varphi(x) = 0$, nel caso del campo scalare complesso.

45. Teorema di Noether per due campi scalari liberi di egual massa

Si consideri la teoria di due campi scalari reali, $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$, nello spazio-tempo quadridimensionale di Minkowski, con densità di Lagrangiana, nella notazione sintetica adottata a lezione:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\,(\partial^\mu \varphi_1)\,(\partial_\mu \varphi_1) + (\partial^\mu \varphi_2)\,(\partial_\mu \varphi_2)\,\right] - \frac{1}{2}\, m^2\,(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\,.$$

Si osservi (non è richiesto dimostrarlo) che $\mathcal{L}$ risulta manifestamente invariante sotto le trasformazioni

$$\varphi_1'(x) = \cos\alpha\,\varphi_1(x) + \sin\alpha\,\varphi_2(x)\,, \qquad \varphi_2'(x) = -\sin\alpha\,\varphi_1(x) + \cos\alpha\,\varphi_2(x)\,,$$

dove α è un parametro reale che non dipende dal punto x dello spazio-tempo.

(a) Si derivino, a partire dalla densità di Lagrangiana assegnata, le equazioni del moto per $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$.

(b) Si individui, in corrispondenza della simmetria di cui sopra, una quadricorrente $j^\mu(x)$ che lungo le soluzioni delle equazioni del moto soddisfa l'equazione di continuità $\partial_\mu\, j^\mu(x) = 0$, e se ne scriva l'espressione esplicita in termini dei campi φ_1, φ_2 e delle loro derivate.