

Questo risultato mostra che il fotone ha spin  $|J| = 1$ , come richiesto dalla natura vettoriale del campo elettromagnetico, e che le due proiezioni  $J_3 = \pm 1$  corrispondono agli stati polarizzati circolarmente. L'assenza dello stato con  $J_3 = 0$  è una conseguenza della condizione di trasversalità (5.88), che abbassa di uno il numero di gradi di libertà.

## Capitolo 6

### L'EQUAZIONE DI DIRAC

In questo Capitolo e nei seguenti useremo unità di misura naturali, in cui  $\hbar = c = 1$ .

Secondo la meccanica quantistica non relativistica, l'evoluzione della funzione d'onda di una particella libera di massa  $m$  ed impulso  $\mathbf{p}$  è descritta dall'equazione di Schrödinger

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{H} \psi, \quad (6.1)$$

con l'operatore Hamiltoniano  $\mathbf{H} = -\nabla^2/2m$  che si ottiene dall'espressione dell'energia

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (6.2)$$

con le sostituzioni

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i \nabla. \quad (6.3)$$

Lo stesso Schrödinger [6] suggerì per primo una generalizzazione della (6.1) basata sull'uso dell'espressione relativistica

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2. \quad (6.4)$$

Il risultato di questa procedura è l'equazione di Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\psi = 0, \quad (6.5)$$

Moltiplicando per  $\psi^*$  e sottraendo al risultato il prodotto tra la  $\psi$  e la complessa coniugata della (5.5) si ottiene l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j}, \quad (6.6)$$

con

$$\rho = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \quad (6.7)$$

e

$$\mathbf{j} = -\nabla (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (6.8)$$

Tuttavia, la  $\rho$  che compare a primo membro della (6.6) non può essere identificata con la densità di probabilità, come la quantità analoga che si ottiene dall'equazione di Schrödinger, poiché non gode della proprietà di essere sempre positiva. Per convincersi di questo basta sostituire  $i\partial/\partial t \rightarrow E$  nella (6.7). Il risultato,

$$\rho = E|\psi|^2,$$

mostra infatti che la  $\rho$  può essere sia positiva sia negativa, dal momento che l'equazione di Klein-Gordon ha soluzioni con energia di entrambi i segni

$$E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2},$$

Si noti che nel limite non relativistico  $E \approx m > 0$  e si trova il familiare risultato  $\rho \propto |\psi|^2$ .

La presenza della derivata seconda rispetto al tempo contraddice, inoltre, il postulato della meccanica quantistica secondo il quale la funzione d'onda contiene tutta l'informazione sullo stato di un sistema fisico, e deve quindi essere completamente determinata dal suo valore al tempo iniziale.

A causa di questi problemi l'equazione di Klein-Gordon venne inizialmente accantonata, fino a quando Pauli e Weisskopf [7] suggerirono che la sua soluzione doveva essere interpretata come un campo quantistico, anziché come la funzione d'onda di una particella.

## 6.1 Forma e proprietà dell'equazione di Dirac

Se la funzione d'onda ad un dato istante deve contenere tutta l'informazione sullo stato, l'equazione d'onda deve essere del primo ordine rispetto al tempo. Poiché la trattazione relativistica richiede che il tempo e le coordinate spaziali siano trattate in modo simmetrico, questo implica che anche le derivate spaziali devono apparire al primo ordine. Inoltre, le soluzioni debbono essere compatibili con l'equazione di Klein Gordon, che si ottiene direttamente dall'espressione relativistica dell'energia (6.4).

Per soddisfare a tutte queste condizioni, Dirac propose[8] di scrivere l'equazione d'onda nella forma

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m)\psi, \quad (6.9)$$

dove  $\psi$  è un vettore ad  $N$  componenti

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dots \\ \psi_N \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

e le  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) e  $\beta$  sono matrici  $N \times N$ , con  $N$  da determinare. Si noti che funzioni d'onda del tipo (6.10) si incontrano anche in meccanica quantistica non relativistica. Per esempio, la funzione d'onda di una particella di spin  $1/2$  è un vettore a due componenti.

Poiché l'Hamiltoniana è un operatore hermitiano, deve essere  $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^\dagger$  e  $\beta = \beta^\dagger$ . Inoltre, dalla richiesta che la (6.9) sia compatibile con l'equazione di Klein Gordon, cioè che

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) = E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

segue la condizione:

$$\begin{aligned} & \alpha_i \alpha_j p_i p_j + m(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i + \beta^2 m^2 \\ &= \frac{1}{2} \{ (\alpha_i, \alpha_j) + [\alpha_i, \alpha_j] \} p_i p_j + m \{ \alpha_i, \beta \} p_i + \beta^2 m^2 \\ &= p_i p_j \delta_{ij} + m^2, \end{aligned}$$

Si noti che  $p_i p_j$  è un tensore simmetrico, la cui contrazione col tensore antisimmetrico  $[\alpha_i, \alpha_j]$  è nulla. Troviamo quindi:

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \quad (6.11)$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad (6.12)$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1. \quad (6.13)$$

È conveniente introdurre un nuovo set di matrici  $\gamma^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) definito dalle

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta \alpha_i = \gamma^0 \alpha_i, \quad (6.14)$$

che soddisfano alle regole di anticommutazione

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (6.15)$$

e godono delle proprietà

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1, \quad (6.16)$$

$$\gamma^{\mu\nu} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^\nu. \quad (6.17)$$

Usando le matrici  $\gamma^\mu$  si può riscrivere l'equazione di Dirac nella forma data da Feynman. Moltiplicando la (6.9) da sinistra per  $\beta = \gamma^0$  si ottiene:

$$i\beta \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\beta \alpha_i p_i + \beta^2 m) \psi = \left( -i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} + m \right) \psi,$$

cioè

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (6.18)$$

Infine, introducendo la notazione  $\not{\beta} = \gamma^\mu \partial_\mu$  si può porre la (6.18) nella forma

$$(i\not{\beta} - m)\psi = 0. \quad (6.19)$$

**Proprietà delle matrici di Dirac** Le regole di anticommutazione (6.11)-(6.12) e la (6.13) determinano le proprietà cui devono soddisfare le matrici  $\alpha_i$  e  $\beta$ . La (6.13) implica che gli autovalori delle matrici  $\alpha_i$  e  $\beta$  sono tutti uguali a  $\pm 1$ , mentre dalla (6.11) segue che, per  $j \neq i$

$$\alpha_i \alpha_j \alpha_j = \alpha_i = -\alpha_j \alpha_i \alpha_j$$

$$Tr(\alpha_i) = -Tr(\alpha_j \alpha_i \alpha_j) = -Tr(\alpha_j \alpha_i \alpha_j) = -Tr(\alpha_i),$$

cioè

$$Tr(\alpha_i) = 0. \quad (6.20)$$

Usando lo stesso procedimento si dimostra anche che dalla (6.11) segue che

$$Tr(\beta) = 0. \quad (6.21)$$

Una matrice  $N \times N$  i cui autovalori sono tutti uguali a  $\pm 1$  può avere traccia nulla solo se  $N$  è un numero pari. Quindi le dimensioni possibili delle matrici di Dirac sono  $N = 2, 4, \dots$

Possiamo escludere subito il caso  $N = 2$ . Le matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

utilizzate nella Meccanica Quantistica non relativistica per descrivere particelle di spin  $1/2$ , soddisfano le regole di anticommutazione:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad (6.23)$$



analoghe alle (6.11). È però impossibile trovare una quarta matrice indipendente che anticommuti con le  $\sigma_i$ . Infatti, le matrici di Pauli formano, insieme alla matrice unità  $I$ , una base per le matrici  $2 \times 2$ , per cui ogni matrice  $2 \times 2$ ,  $M$ , si può scomporre secondo la

$$M = M_0 I + M_i \sigma_i$$

con

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una matrice  $M$  che sia indipendente dalle  $\sigma_i$  deve avere  $M_0 \neq 0$ , ma in questo caso non può ovviamente anticommutare con le  $\sigma_i$  stesse.

La dimensione minima della matrici  $\alpha_i$  e  $\beta$  è  $N = 4$ . Si può verificare facilmente che le matrici  $4 \times 4$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.24)$$

soddisfanno alle (6.11)-(6.13).

La rappresentazione della matrici  $\gamma^\mu$  ottenute dalle (6.24), chiamata rappresentazione di Pauli, non è unica. Data una matrice non singolare  $S$ , le nuove matrici:

$$\tilde{\gamma}^\mu = S^{-1} \gamma^\mu S. \quad (6.25)$$

soddisfanno alle stesse regole di anticommutazione delle  $\gamma^\mu$ :

$$\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = S^{-1} \gamma^\mu S S^{-1} \gamma^\nu S + S^{-1} \gamma^\nu S S^{-1} \gamma^\mu S = S^{-1} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} S = 2g^{\mu\nu}.$$

Si può dimostrare che, dati due set di matrici  $\gamma^\mu$  e  $\tilde{\gamma}^\mu$  che soddisfano alle regole di anticommutazione (6.15), esse sono sempre collegate da una trasformazione del tipo (6.25), con una particolare matrice non-singolare  $S$ .

### 6.1.1 Spin

L'operatore Hamiltoniano dell'equazione di Dirac

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m \quad (6.26)$$

non commuta con il momento angolare orbitale:

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}. \quad (6.27)$$

Usando le regole di commutazione  $[p_i, x_j] = -i\delta_{ij}$  si ottiene, ad esempio:

$$\begin{aligned} [H, L_3] &= [\alpha_4 p_4, x_1 p_2 - p_2 x_1] \\ &= \alpha_1 p_2 [p_1, x_1] - \alpha_2 p_1 [p_2, x_2] \\ &= -i(\alpha_1 p_2 - \alpha_2 p_1) \neq 0. \end{aligned}$$

Le costanti del moto associate all'invarianza per rotazioni della (6.9) sono le componenti del *momento angolare totale*, definito come

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{L} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}; \\ \boldsymbol{\Sigma} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.28)$$

che infatti commuta con l'Hamiltoniana (6.26). Per vedere questo, definiamo il tensore antisimmetrico

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (6.29)$$

le cui componenti  $\sigma^{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) sono

$$\sigma^{ij} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} [\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & [\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} = \epsilon^{ijk} \Sigma_k.$$

Otteniamo quindi:

$$\Sigma_3 = \frac{i}{2} (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_2 \gamma_1) = -\frac{i}{2} (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_1).$$

In questa forma possiamo calcolare agevolmente il commutatore di  $H$  con  $\Sigma_3$ :

$$\frac{1}{2} [H, \Sigma_3] = -\frac{i}{4} [\alpha_4 \beta_4, \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_1] = -i(\alpha_2 p_1 - \alpha_1 p_2) = -[H, L_3],$$

cioè

$$[H, J_3] = \left[ H, L_3 + \frac{1}{2}\Sigma_3 \right] = 0.$$

Gli autovalori di  $\Sigma_3$  sono  $\pm 1$ . La (6.28) mostra che l'equazione di Dirac descrive particelle con spin  $1/2$ .

Quando l'impulso della particella non è nullo, mentre la proiezione dello spin lungo un asse generico non si conserva, come abbiamo appena visto, la proiezione dello spin lungo la direzione del moto commuta con l'Hamiltoniana. Questa grandezza prende il nome di elicità, ed è descritta dall'operatore

$$\sigma_p = \frac{(\Sigma \cdot \mathbf{p})}{|\mathbf{p}|}, \quad (6.30)$$

**Commento 1.** La comparsa dello spin spiega perché la funzione d'onda che soddisfa l'equazione di Dirac deve essere un vettore multidimensionale. Tuttavia, per spin  $1/2$  ci aspetteremo una funzione d'onda a due componenti, mentre la dimensione minima delle matrici di Dirac è  $N = 4$ . La duplicazione delle componenti è dovuta alla necessaria presenza dell'antiparticella, come vedremo più avanti.

### 6.1.2 Invarianza relativistica

Vogliamo dimostrare che se  $\psi(x)$  soddisfa l'equazione di Dirac in un dato sistema di riferimento  $O$ , la funzione d'onda determinata da un osservatore in un altro sistema  $O'$ , soddisfa l'equazione di Dirac in  $O'$ .

Questo è analogo a quanto succede nel caso del tensore del campo elettromagnetico: le componenti di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  si trasformano da un riferimento all'altro, ma la forma delle equazioni di Maxwell rimane invariata.

Consideriamo la trasformazione di Lorentz omogenea da  $O$  ad  $O'$

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu},$$

### 6.1 Forma e proprietà dell'equazione di Dirac

In corrispondenza, le componenti della  $\psi$  si devono trasformare linearmente<sup>1</sup>, con una matrice che dipende dalla trasformazione  $\Lambda$

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \quad (6.31)$$

La dipendenza di  $S$  da  $\Lambda$  deve essere tale da rispettare la regola di composizione delle trasformazioni di Lorentz, almeno per quanto riguarda le trasformazioni prossime all'identità:

$$S(\Lambda_1\Lambda_2) = S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) \quad (6.32)$$

Si noti che noi non conosciamo a priori la forma di  $S(\Lambda)$ . L'invarianza relativistica della equazione di Dirac richiede che sia possibile determinare delle  $S(\Lambda)$  tali che:

- soddisfino le legge di composizione (6.32)
- conducano ad una  $\psi'$  che soddisfa l'equazione di Dirac in  $O'$  se  $\psi$  la soddisfa in  $O$ .

Consideriamo adesso l'equazione di Dirac in  $O$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \left( i\gamma^{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} - m \right) \psi(x) = \left( i\gamma^{\lambda} \frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} - m \right) S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = \\ &= \left( i\gamma^{\lambda} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - m \right) S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = \\ &= \left( i\gamma^{\lambda} \Lambda^{\mu}_{\lambda} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - m \right) S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') \end{aligned}$$

Moltiplicando per la matrice  $S(\Lambda)$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \left( i\tilde{\gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - m \right) \psi'(x') &= 0; \\ \tilde{\gamma}^{\mu} &= \Lambda^{\nu}_{\lambda} S(\Lambda)\gamma^{\lambda} S^{-1}(\Lambda) \end{aligned} \quad (6.33)$$

L'equazione (6.33) coincide con l'equazione di Dirac nel sistema  $O'$  se le matrici  $\tilde{\gamma}^{\mu}$  coincidono con  $\gamma^{\mu}$ , ovvero se  $S(\Lambda)$  soddisfa la relazione:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu} \quad (6.34)$$

<sup>1</sup> per rispettare il Principio di Sovrapposizione

Per risolvere la (6.34), ci restringiamo alle trasformazioni infinitesime, che abbiamo visto nella (3.81) essere della forma (cfr. la Sez. 3.6):

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu,$$

con

$$\epsilon^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} \epsilon_{\alpha\nu},$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}$$

(6.35)

Ora scriviamo

$$S = 1 + T, \quad S^{-1} = 1 - T$$

con  $T$  infinitesimo:

$$T = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta},$$

(6.36)

e  $T^{\alpha\beta}$  è antisimmetrico.

Sostituendo nell'equazione (6.34) otteniamo (al primo ordine in  $\epsilon$ )

$$\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu = \gamma^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu \gamma^\nu = S^{-1} \gamma^\mu S = \gamma^\mu + (\gamma^\mu T - T \gamma^\mu).$$

cioè (usiamo la (6.36) e la (6.35))

$$(g^{\delta\mu} \gamma^\delta - g^{\alpha\mu} \gamma^\beta) = [\gamma^\mu, T^{\alpha\beta}].$$

(6.37)

La (6.37) ammette come soluzione il tensore antisimmetrico (si confronti con la (6.29))

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] = -\frac{i}{2} \sigma^{\alpha\beta},$$

La trasformazione  $S$  che cercavamo è quindi:

$$S = 1 - \frac{i}{4} \epsilon_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta},$$

(6.38)

Notiamo la proprietà

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1}.$$

(6.39)

La (6.39) si dimostra usando la

$$\sigma^{\mu\nu\dagger} = \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0, \quad (6.40)$$

che implica

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = 1 + \frac{i}{4} \epsilon_{\mu\nu} \gamma^0 \sigma^{\mu\nu\dagger} \gamma^0 = 1 + \frac{i}{4} \epsilon_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = S^{-1}. \quad (6.41)$$

Si noti che la (6.39) vale per qualsiasi trasformazione di Lorentz propria, che può essere ottenuta come prodotto di trasformazioni infinitesime. Per convincerci di ciò, consideriamo il caso in cui

$$S = S_1 S_2, \quad S^{-1} = S_2^{-1} S_1^{-1},$$

con  $S_1$  e  $S_2$  trasformazioni infinitesime. Dalla (6.39) segue che

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 S_2^\dagger S_1^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 S_2^\dagger \gamma^0 \gamma^0 S_1^\dagger \gamma^0 = S_2^{-1} S_1^{-1} = S^{-1}.$$

**Lo spinore aggiunto** In generale  $\psi$  è una funzione d'onda complessa. Accanto a  $\psi$  possiamo introdurre lo spinore complesso coniugato  $\psi^*$ . Se consideriamo  $\psi$  come un vettore colonna, vedi la (6.10), possiamo introdurre lo spinore  $\psi^\dagger$ , un vettore riga che ha per componenti gli elementi di  $\psi^*$ :

$$\psi^\dagger = (\psi^*)^T \quad (6.42)$$

Notiamo che  $\psi^\dagger \psi$  non è invariante sotto trasformazioni di Lorentz, visto che la matrice  $S(\Lambda)$  non è unitaria. Un invariante si costruisce considerando lo *spinore aggiunto*:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (6.43)$$

Usando la relazione (6.41) si vede che

$$\bar{\psi}'(x') = \psi^\dagger(x) S^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi}(x) S^{-1} \quad (6.44)$$

in modo tale che:

$$(\bar{\psi}' \psi')^\dagger(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1} S \psi(x) = (\bar{\psi} \psi)(x) \quad (6.45)$$



**Forme bilineari covarianti** Moltiplicando tra loro due o più matrici  $\gamma$  si genera un'algebra di matrici. Poiché il prodotto simmetrico di due matrici  $\gamma$  è  $\pm I$ , possiamo limitarci a considerare i prodotti antisimmetrizzati negli indici di Lorentz. Si trovano così quindici matrici  $4 \times 4$  linearmente indipendenti (le quattro matrici  $\gamma$ , sei prodotti di due  $\gamma$ , quattro di tre ed uno di quattro), che insieme all'identità formano l'algebra di Dirac

$$\Gamma^S = I, \quad \Gamma_\mu^V = \gamma_\mu, \quad \Gamma_{\mu\nu}^D = \sigma_{\mu\nu},$$

$$\Gamma^P = \gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \Gamma_\mu^A = \gamma_5\gamma_\mu.$$

Notiamo che  $\gamma_5$  è hermitiana mentre per le altre matrici dell'algebra valgono relazioni analoghe alle (6.17):

$$\Gamma = \gamma^0\Gamma^{\dagger}\gamma^0 \quad (6.46)$$

Usando i risultati del paragrafo precedente si ottengono facilmente le leggi di trasformazione delle forme bilineari del tipo

$$\psi^{\dagger}\gamma^{\theta}\Gamma\psi = \bar{\psi}\Gamma^{\theta}\psi, \quad (6.47)$$

in termini dello spinore aggiunto  $\bar{\psi}$ , che si trasforma secondo la (6.44). Le forme bilineari (6.47) svolgono un ruolo importante, poiché hanno proprietà di trasformazione definite sotto trasformazioni di Lorentz. Sono gli ingredienti base con cui costruire le grandezze osservabili e le densità di Lagrangiana invarianti.

Consideriamo, per esempio, l'equazione di continuità (6.6) che si ottiene dall'equazione di Dirac. Si trova facilmente che

$$\rho = \psi^{\dagger}\psi = \bar{\psi}\gamma^0\psi, \quad \mathbf{j} = \psi^{\dagger}\boldsymbol{\alpha}\psi = \bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi.$$

La forma bilineare  $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$  è la quadricorrente associata alla particella descritta dall'equazione di Dirac e  $j^0 = \rho$  è la densità di probabilità, il cui integrale di volume è una grandezza conservata.

Possiamo ora procedere a determinare le leggi di trasformazione delle forme bilineari.

•  $\bar{\psi}\Gamma_S\psi = \bar{\psi}\psi$  trasforma come uno scalare, perché

$$\bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi.$$

• Le  $\bar{\psi}\Gamma_V^{\mu}\psi = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$  trasformano come le componenti di un quadrivettore covariante, perché

$$\bar{\psi}'\gamma^{\mu}\psi' = \bar{\psi}S^{-1}\gamma^{\mu}S\psi = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi.$$

• Le  $\bar{\psi}\Gamma_T^{\mu\nu}\psi = \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi = \bar{\psi}i[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]/2\psi$  trasformano come gli elementi di un tensore antisimmetrico, perché

$$\bar{\psi}'\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\psi' = \bar{\psi}S^{-1}\gamma^{\mu}S S^{-1}\gamma^{\nu}S\psi = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\psi.$$

•  $\bar{\psi}\Gamma_P\psi = \bar{\psi}\gamma^5\psi$  trasforma secondo la

$$\bar{\psi}'\gamma^5\psi' = \det(\Lambda)\bar{\psi}\gamma^5\psi,$$

cioè trasforma come uno scalare nel caso di trasformazioni di Lorentz proprie ( $\det(\Lambda) = 1$ ) ma cambia segno nel caso di trasformazioni di parità ( $(x_0, x_i) \rightarrow (x_0, -x_i)$ ), il cui determinante vale  $-1$ . Quindi  $\bar{\psi}\gamma^5\psi$  è una densità pseudoscalare.

La legge di trasformazione si ottiene usando la definizione

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\tau},$$

dove  $\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$  è il tensore unità antisimmetrico nei quattro indici. Si trova così

$$\begin{aligned} S^{-1}\gamma^5S &= \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\sigma}{}_{\gamma}\Lambda^{\tau}{}_{\delta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma}\gamma^{\delta} \\ &= \frac{i}{4!}\det(\Lambda)\epsilon_{\delta\lambda\sigma\rho}\gamma^{\delta}\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho} = \det(\Lambda)\gamma^5. \end{aligned}$$

• Le  $\bar{\psi}\Gamma_A^{\mu\nu}\psi = \bar{\psi}\gamma^5\gamma^{\mu}\psi$  trasformano secondo la

$$\bar{\psi}'\gamma^5\gamma^{\mu}\psi' = \det(\Lambda)\Lambda^{\nu}{}_{\mu}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^{\nu}\psi,$$

cioè come le componenti di un quadrivettore nel caso di trasformazioni di Lorentz proprie ed in modo opposto sotto trasformazioni di parità.

**Commento 1.** Una corrispondenza  $\Lambda \rightarrow S(\Lambda)$  tra gli elementi di un gruppo ed un insieme di matrici che verificano la stessa legge di composizione del gruppo, definisce una *rappresentazione* del gruppo stesso. Le relazioni (6.31), (6.32) definiscono una rappresentazione del gruppo di Lorentz, che si aggiunge a quelle già viste nella Sez. 3.3 a proposito dei tensori irriducibili. Secondo la classificazione ivi considerata, la rappresentazione 4-dimensionale degli spinori di Dirac, corrisponde alla  $(0, 1/2) \oplus (1/2, 0)$ . Si tratta di una rappresentazione *riducibile*, infatti esiste una matrice non triviale (la matrice  $\gamma_5$ ) che commuta con tutti i generatori del gruppo. I prodotti tensoriali di un numero dispari di rappresentazioni spinoriali generano una nuova serie di rappresentazioni che, dal punto di vista delle rotazioni, contengono rappresentazioni di spin semintero.

**Commento 2.** Secondo la (6.39) le matrici  $S(\Lambda)$  sono *pseudounitarie*, quindi non unitarie. In effetti si può dimostrare che le rappresentazioni con operatori unitari del gruppo di Lorentz sono necessariamente infinito-dimensionali. Questo è dovuto al fatto che  $L_+^{\uparrow}$  è un gruppo *non compatto*: lo spazio dei parametri che descrivono le trasformazioni costituisce un insieme non compatto, a differenza delle rotazioni. Per queste ultime, infatti, gli elementi di matrice sono funzioni limitate degli angoli di rotazione, sempre compresi nell'intervallo  $(0, 2\pi)$ . Al contrario, il parametro  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  che compare in  $\Lambda_0^{\uparrow}$  è illimitato.

**Commento 3.** Secondo la Meccanica Quantistica, il modulo quadro del prodotto tra due stati,  $|\langle B|A \rangle|^2$ , rappresenta la probabilità di trovare lo stato  $|B\rangle$  come risultato di una misura sullo stato  $|A\rangle$ . Questa probabilità deve essere la stessa in tutti i sistemi di riferimento, quindi se  $|\Lambda A\rangle$  e  $|\Lambda B\rangle$  sono i ket che rappresentano gli stati trasformati, dobbiamo avere, qualsiasi siano  $|A\rangle$  e  $|B\rangle$ :

$$|\langle \Lambda B | \Lambda A \rangle|^2 = |\langle B | A \rangle|^2 \quad (6.48)$$

Sempre secondo la Meccanica Quantistica, gli stati trasformati si ottengono applicando un operatore lineare  $U(\Lambda)$ , che rappresenta la trasformazione di Lorentz  $\Lambda$ . Deve quindi essere:

$$|\langle B | U(\Lambda)^\dagger U(\Lambda) | A \rangle|^2 = |\langle B | A \rangle|^2 \quad (6.49)$$

Wigner ha mostrato che la (10.39) ha due possibili soluzioni:

$$\langle B | U(\Lambda)^\dagger U(\Lambda) | A \rangle = \langle B | A \rangle \quad \text{ovvero} \quad \langle B | U(\Lambda)^\dagger U(\Lambda) | A \rangle = \langle B | A \rangle^* \quad (6.50)$$

Possiamo escludere il secondo caso per continuità: quando  $\Lambda$  tende alla trasformazione unitaria,  $|\Lambda A\rangle$  deve tendere ad  $|A\rangle$ , quindi  $U(\Lambda)$  all'identità che soddisfa la prima condizione e non la seconda. In conclusione

- le trasformazioni di Lorentz sono rappresentate sugli stati quantistici da operatori unitari

**Commento 4.** Vista la non-unitarietà delle matrici  $S(\Lambda)$  è interessante chiederci in che modo i prodotti scalari tra stati che sono soluzioni dell'equazioni di Dirac possano fornire una rappresentazione unitaria del gruppo di Lorentz, come richiesto dalle considerazioni del commento precedente. Nella teoria di Dirac, per due stati  $|A\rangle$  e  $|B\rangle$ , si ha:

$$\langle A | B \rangle = \int d^3x \psi_A^*(\mathbf{x}, t) \psi_B(\mathbf{x}, t)$$

La densità all'interno dell'integrale non è invariante. Piuttosto, la forma della  $S(\Lambda)$  implica che essa sia la componente temporale di una 4-corrente, conservata per l'equazione di Dirac:

$$\begin{aligned} \psi_A^*(\mathbf{x}, t) \psi_B(\mathbf{x}, t) &= \bar{\psi}_A(\mathbf{x}, t) \gamma^0 \psi_B(\mathbf{x}, t) = J_{A,B}^0 \\ \partial_\mu J_{A,B}^\mu &= 0 \end{aligned}$$

Ma, come abbiamo visto nella Sez. 3.5, l'integrale sullo spazio della componente temporale di una 4-corrente conservata è un invariante relativistico. Quindi, per una qualsiasi



trasformazione di Lorentz:

$$\langle \Lambda A | \Lambda B \rangle = \langle A | B \rangle$$

che è proprio la condizione di invarianza dei prodotti scalari. La non invarianza di  $\psi^* \psi$  è quanto richiesto per compensare esattamente la non invarianza della misura  $d^3x$ , in modo tale che le matrici  $S(\Lambda)$  inducano sugli stati fisici una rappresentazione unitaria del gruppo di Lorentz. Questo risultato sarà derivato in modo esplicito nel seguito, Sez. 7.4.

### 6.1.3 Boost

Con questo termine si indica una trasformazione di Lorentz speciale, che corrisponde a passare da un dato sistema di riferimento,  $O$ , ad un sistema  $O'$  che si muove rispetto ad  $O$  con velocità  $\beta$  lungo l'asse  $x$  positivo.

La legge di trasformazione tra le coordinate di  $O$  ed  $O'$  coinvolge solo  $x^0$  e  $x^1$ , e si scrive:

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \Lambda_0^0 x^0 + \Lambda_1^0 x^1 = \gamma(t - \beta x) \\ x^{1'} &= \Lambda_0^1 x^0 + \Lambda_1^1 x^1 = \gamma(-\beta t + x) \end{aligned}$$

dove:

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \cosh \theta \quad (6.51)$$

e  $\theta$  è la rapidità, con:

$$\beta = \tanh \theta. \quad (6.52)$$

L'origine di  $O'$ ,  $x' = 0$ , si muove con l'equazione oraria:  $x = \beta t$  come deve.

Poniamo  $\beta$  infinitesimo:

$$\beta = \delta\theta$$

### 6.1 Forma e proprietà dell'equazione di Dirac

e definiamo i parametri infinitesimi della trasformazione secondo le (6.35). Otteniamo:

$$\epsilon_{1,0} = -\epsilon_{0,1} = \delta\theta$$

La matrice  $S(\Lambda)$ , che regola la trasformazione tra  $\psi(x)$  e  $\psi'(x')$  è quindi, secondo la (6.38):

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= 1 - \frac{i}{4} \epsilon_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} = \\ &= 1 - \frac{i\delta\theta}{2} \sigma^{10} \end{aligned} \quad (6.53)$$

usando la definizione:

$$\sigma^{10} = \frac{i}{2} [\gamma^1, \gamma^0] = i\gamma^1 \gamma^0 = -i\alpha_1$$

troviamo:

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{\delta\theta}{2} \alpha_1$$

Trasformazioni con rapidità finita,  $\theta = \tanh^{-1} \beta$  si ottengono componendo le trasformazioni infinitesime, che corrisponde a moltiplicare tra loro le relative matrici (6.54).

Posto:

$$\delta\theta = \frac{\theta}{N}; \quad (N \text{ grande})$$

troviamo:

$$S(\Lambda) = \left( 1 - \frac{\theta}{2N} \alpha_1 \right)^N \rightarrow e^{-\frac{\theta}{2} \alpha_1} \quad (6.54)$$

L'esponenziale di  $\alpha_1$  si esprime facilmente in termini elementari, poiché  $(\alpha_1)^2 = 1$ .

Sviluppando in serie troviamo:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\theta}{2} \alpha_1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{\theta}{2} \alpha_1 \right)^n = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left( -\frac{\theta}{2} \right)^{2k} + \alpha_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left( -\frac{\theta}{2} \right)^{2k+1} = \cosh \frac{\theta}{2} - \alpha_1 \sinh \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (6.55)$$

Infine, usiamo le ben note relazioni di trigonometria iperbolica:

$$\cosh^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\cosh \theta + 1}{2}; \quad \sinh^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\cosh \theta - 1}{2} \quad (6.56)$$

per ottenere:

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= \cosh \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\tanh \frac{\theta}{2} \sigma_1 \\ -\tanh \frac{\theta}{2} \sigma_1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta \gamma}{\gamma+1} \sigma_1 \\ -\frac{\beta \gamma}{\gamma+1} \sigma_1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.57)$$

La (6.57) si generalizza immediatamente al caso in cui la velocità sia diretta lungo un versore generico,  $\vec{n}$ :

$$S(\Lambda) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta \gamma}{\gamma+1} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \\ -\frac{\beta \gamma}{\gamma+1} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) & 1 \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

### 6.1.4 Soluzioni dell'equazione di Dirac libera

L'equazione di Dirac, nella forma (6.9) o (6.18) ammette soluzioni nella forma di onde piane relativistiche. Scriviamo:

$$\psi(x) = u(p) e^{-i(p \cdot x)}; \quad p^\mu = (E, \vec{p}) \quad (6.59)$$

L'equazione per la  $u(p)$  prende la forma:

$$(\not{p} - m)u(p) = (p_\mu \gamma^\mu - m)u(p) = 0 \quad (6.60)$$

dove  $u$  è uno spinore a quattro componenti.

Consideriamo, per cominciare, le soluzioni dell'equazione di Dirac per una particella in quiete. In questo caso la (6.60) si riduce a

$$(\gamma^0 E - m)u(p) = 0, \quad (6.61)$$

### 6.1 Forma e proprietà dell'equazione di Dirac

ovvero, esplicitamente:

$$\begin{pmatrix} E - m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E - m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (6.62)$$

La (6.62) ammette autovalori  $E^{(1)} = E^{(2)} = m$  ed  $E^{(3)} = E^{(4)} = -m$ , e gli autovettori corrispondenti sono

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.63)$$

Anche l'equazione di Dirac, come l'equazione di Klein Gordon, ammette soluzioni con energia sia positiva che negativa. Le due soluzioni ad energia positiva corrispondono ai due stati possibili di una particella di spin 1/2. Discuteremo più avanti il significato delle soluzioni ad energia negativa.

Nel caso generale  $\vec{p} \neq 0$  scriviamo il quadrispinore  $u^{(r)}(p)$  in termini di due spinori a due componenti  $u_A$  ed  $u_B$

$$u^{(r)}(p) = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}, \quad (6.64)$$

dalla (6.60) otteniamo il sistema

$$\begin{pmatrix} E - m & -\sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0, \quad (6.65)$$

che ha soluzioni non banali per

$$E^2 - m^2 = (\sigma \cdot p)^2 = p^2. \quad (6.66)$$

Risolvendo la (6.65) nella forma

$$u_A = \frac{(\sigma \cdot p)}{E - m} u_B \quad (6.67)$$

$$u_B = \frac{(\sigma \cdot p)}{E + m} u_A, \quad (6.68)$$

si vede subito che le soluzioni ad energia positiva si possono ottenere dalla (6.68), scegliendo  $u_A$  uguale ad uno degli spinori di Pauli a due componenti

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.69)$$

Le soluzioni ad energia negativa si ottengono in modo analogo a partire dalla (6.67). Possiamo quindi scrivere le quattro soluzioni della (6.60) nella forma

$$u_r^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{(\sigma \cdot \mathbf{p})}{E_p + m} \chi_r \end{pmatrix}, \quad u_r^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{(\sigma \cdot \mathbf{p})}{E_p + m} \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix}, \quad (6.70)$$

con  $r = 1, 2$  e  $E_p = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = |E|$ . Ovviamente, per  $\mathbf{p} \rightarrow 0$  le (6.70) si riducono alle (6.63).

Per descrivere gli stati ad energia negativa, è conveniente introdurre due nuovi quadrispinori  $v_r(\mathbf{p})$  ( $r = 1, 2$ ), definiti dalle

$$v_1(\mathbf{p}) = u_2^{(-)}(-\mathbf{p}), \quad v_2(\mathbf{p}) = -u_1^{(-)}(-\mathbf{p}). \quad (6.71)$$

ovvero:

$$v_r(\mathbf{p}) = \epsilon^{rs} u_s^{(-)}(-\mathbf{p}), \quad (r, s = 1, 2) \quad (6.72)$$

dove  $\epsilon^{rs}$  è il tensore a due indici completamente antisimmetrico<sup>2</sup> ed è sottintesa la somma sugli indici ripetuti. Poniamo inoltre:

$$v_r(\mathbf{p}) = u_r^{(+)}(\mathbf{p}) \quad (6.73)$$

Dalle definizioni segue immediatamente che  $u_r$  e  $v_r$  soddisfano alle equazioni:

$$(\not{p} - m)u_r = 0, \quad (\not{p} + m)v_r = 0. \quad (6.74)$$

La normalizzazione dei quadrispinori si determina scrivendo la soluzione della (6.60)

nella forma

$$\psi(x) = N \left( \frac{m}{V E_p} \right)^{1/2} \times \begin{cases} u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} & (\text{energia positiva}) \\ v_r(\mathbf{p}) e^{ipx} & (\text{energia negativa}) \end{cases} \quad (6.75)$$

<sup>2</sup>  $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1, \epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0$

### 6.1 Forma e proprietà dell'equazione di Dirac

e richiedendo che sia

$$\int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x) = 1, \quad (6.76)$$

cioè

$$u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) = \frac{E_p}{m}. \quad (6.77)$$

Si ottiene così  $N = [(E_p + m)/2m]^{1/2}$ .

Con questa scelta della normalizzazione le relazioni di ortonormalità per i quadrispinori sono:

$$\begin{aligned} u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) &= v_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs} \frac{E_p}{m} \\ u_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(-\mathbf{p}) &= u_r^{(+)\dagger}(\mathbf{p}) u_s^{(-)}(\mathbf{p}) = 0 \end{aligned} \quad (6.78)$$

inoltre, con semplici manipolazioni formali<sup>3</sup> otteniamo dalle (6.74) le relazioni:

$$\begin{aligned} m \bar{u}(\mathbf{p}) \gamma^\mu u(\mathbf{p}) &= p^\mu \bar{u}(\mathbf{p}) u(\mathbf{p}) \\ \bar{u}(\mathbf{p}) v(\mathbf{p}) &= 0 \end{aligned} \quad (6.79)$$

Dalla prima di queste seguono le relazioni di ortonormalità delle  $u$  e  $v$  rispetto alla moltiplicazione per gli spinori aggiunti:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) &= -\bar{v}_r(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs} \\ \bar{u}_r(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) &= \bar{v}_r(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) = 0. \end{aligned} \quad (6.80)$$

La completezza dell'insieme formato dalle soluzioni dell'equazione di Dirac è espressa dalla relazione

$$\sum_r [(u_r)_\alpha(\mathbf{p})(\bar{u}_r)_\beta(\mathbf{p}) - (v_r)_\alpha(\mathbf{p})(\bar{v}_r)_\beta(\mathbf{p})] = \delta_{\alpha\beta}. \quad (6.81)$$

<sup>3</sup> moltiplicando a sinistra la (6.74) per  $\bar{u}(\mathbf{p}) \gamma^\mu$  e sommando l'aggiunta della stessa equazione moltiplicata a destra per  $\gamma^\mu u(\mathbf{p})$  si ottiene la prima delle (6.79); la seconda si ottiene con manipolazioni simili sull'equazione per  $v(\mathbf{p})$  in (6.74).



dove  $(u_r)_\alpha(\mathbf{p})$  è la componente  $\alpha$  del quadrispinore. La (6.81) si ottiene facilmente dalle definizioni dei quadrispinori, che implicano

$$\sum_r (u_r)_\alpha(\mathbf{p})(\bar{u}_r)_\beta(\mathbf{p}) = (\Lambda_p^+)_{\alpha\beta} = \left( \frac{p+m}{2m} \right)_{\alpha\beta} \quad (6.82)$$

$$-\sum_r (v_r)_\alpha(\mathbf{p})(\bar{v}_r)_\beta(\mathbf{p}) = (\Lambda_p^-)_{\alpha\beta} = -\left( \frac{p-m}{2m} \right)_{\alpha\beta}. \quad (6.83)$$

Gli operatori  $\Lambda_p^+$  e  $\Lambda_p^-$  sono proiettori sugli stati di energia rispettivamente positiva e negativa, cioè

$$\Lambda_p^+ u_r = u_r, \quad \Lambda_p^- u_r = v_r, \quad (6.84)$$

$$\Lambda_p^+ v_r = \Lambda_p^- u_r = 0 \quad (6.85)$$

Sulla base della completezza delle soluzioni dell'equazione di Dirac, possiamo sviluppare ogni soluzione, secondo l'espressione:

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p}, r} \sqrt{\frac{m}{E(\mathbf{p})}} [a_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-i(p\mathbf{x})} + (b_r(\mathbf{p}))^* v_r(\mathbf{p}) e^{i(p\mathbf{x})}] \quad (6.86)$$

Per gli ulteriori sviluppi registriamo l'espressione della normalizzazione della funzione d'onda nonché il valore medio dell'energia e del momento in termini delle ampiezze dei modi normali di oscillazione che appaiono nella (6.86). Nell'eseguire i calcoli, trattiamo le componenti degli spinori  $u$  e  $v$  come numeri commutanti, ma evitiamo di scambiare l'ordine in cui appaiono i coefficienti  $a$  e  $b$ . Con l'aiuto delle relazioni di ortogonalità (6.78) troviamo:

$$N = \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{p}, r} [a_r(\mathbf{p}) (a_r(\mathbf{p}))^* + (b_r(\mathbf{p}))^* b_r(\mathbf{p})]; \quad (6.87)$$

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m] \psi(\mathbf{x}, t) = \\ &= \sum_{\mathbf{p}, r} E(\mathbf{p}) [a_r(\mathbf{p}) (a_r(\mathbf{p}))^* - (b_r(\mathbf{p}))^* b_r(\mathbf{p})]; \end{aligned} \quad (6.88)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P} \rangle &= \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) (-i\nabla) \psi(\mathbf{x}, t) = \\ &= \sum_{\mathbf{p}, r} \mathbf{p} [a_r(\mathbf{p}) (a_r(\mathbf{p}))^* - (b_r(\mathbf{p}))^* b_r(\mathbf{p})]. \end{aligned} \quad (6.89)$$

(il fattore di normalizzazione  $\sqrt{m/EV}$  è stato preso in modo che l'energia del modo di oscillazione  $\mathbf{p}, r$  sia uguale ad  $E(\mathbf{p})$  per ampiezza di oscillazione unitaria).

**Soluzioni con  $\mathbf{p} \neq 0$  e boost di Lorentz.** Le soluzioni a  $\mathbf{p} \neq 0$  si possono ottenere con una trasformazione di Lorentz a partire da quelle che descrivono una particella in quiete, utilizzando la rappresentazione del boost di Lorentz determinata nella Sez. 6.1.3.

Indichiamo con:

$$\psi'(x') = e^{-i(p'x')} u'(p') \quad (6.90)$$

lo spinore nel riferimento  $O'$  introdotto nella Sez. 6.1.3. Avremo:

$$\psi(x) = e^{-i(p\mathbf{x})} u(p) = S^{-1}(\Lambda) \psi'(x') = e^{-i(p'x')} S^{-1}(\Lambda) u'(p') \quad (6.91)$$

ovvero, dato che  $(p'x') = (p\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} u(p) &= S^{-1}(\Lambda) u'(p'); \\ S^{-1}(\Lambda) &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{p'x'}{\gamma+1} \\ \frac{p'x'}{\gamma+1} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.92)$$

Se la particella è in quiete in  $O'$ , energia e momento in  $O$  sono date da:

$$p = \pm m\beta\gamma; \quad p^0 = \pm E = \pm m\gamma \quad (6.93)$$

per le soluzioni ad energia positiva e negativa. Per le prime troviamo, quindi (si confronti con le definizioni (6.70)-(6.63)):

$$\begin{aligned} u_r^{(+)}(p) = u(p) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{p'x'}{E+m} \\ \frac{p'x'}{E+m} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \chi_r \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{p'x'}{E+m} \chi_r \end{pmatrix} \quad (r = 1, 2) \end{aligned} \quad (6.94)$$

e per le soluzioni ad energia negativa:

$$u_r^{(-)}(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-\beta\alpha_r}{E+m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ X_r \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \frac{-\beta\alpha_r X_r}{E+m} \\ X_r \end{bmatrix}$$

$$v_r(p) = \epsilon^{rs} u_s^{(-)}(-p) = \epsilon^{rs} \begin{bmatrix} \frac{\beta\alpha_r X_s}{E+m} \\ X_s \end{bmatrix} \quad (r, s = 1, 2) \quad (6.95)$$

Le soluzioni corrispondenti a energia positiva e negativa non vengono mescolate dalla trasformazione di Lorentz.

### 6.1.5 Il momento magnetico dell'elettrone

Consideriamo un elettrone in un campo elettromagnetico assegnato  $A^\mu \equiv (\phi, \mathbf{A})$ . L'equazione di Dirac in presenza del campo si ottiene con la sostituzione minimale considerata nella Sez. 5.4:

$$i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu + eA^\mu, \quad (6.96)$$

dove  $e$  è la carica elettronica. Otteniamo:

$$(i\partial + e\mathbf{A} - m)\psi = 0, \quad (6.97)$$

ovvero

$$\left[ \beta \left( i\frac{\partial}{\partial t} + e\phi \right) - \beta\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) - m \right] \psi = 0 \quad (6.98)$$

Se ci restringiamo alle soluzioni con energia positiva, l'equazione (6.96) fornisce una descrizione straordinariamente accurata del comportamento dell'elettrone in un campo elettromagnetico dato, sia esso il campo elettrico generato da un nucleo atomico sia un campo esterno classico. Vogliamo ora studiare l'equazione (6.98) in quest'ultimo caso, nel limite non relativistico, per

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \approx m \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} \right) = m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (6.99)$$

con  $m \gg \mathbf{p}^2/2m$ . In queste condizioni è conveniente isolare il fattore di fase rapidamente variabile che corrisponde all'energia di riposo, e riscrivere la soluzione della (6.98) nella forma

$$\psi = \tilde{\psi} e^{-i\epsilon t}, \quad (6.100)$$

dove  $\tilde{\psi}$  oscilla molto più lentamente che  $\exp(-i\epsilon t)$ .

Sostituendo la (6.100) nella (6.98) e moltiplicando da sinistra per  $\beta \exp(i\epsilon t)$  si ottiene

$$\left( i\frac{\partial}{\partial t} + m \right) \tilde{\psi} = [\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) + \beta m - e\phi] \tilde{\psi}, \quad (6.101)$$

$\tilde{\psi}$  è u no spinore a quattro componenti che possiamo scrivere nella forma

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (6.102)$$

con  $\varphi$  ed  $\eta$  spinori a due componenti. Dalle

$$\boldsymbol{\alpha} \tilde{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \eta \\ \boldsymbol{\sigma} \varphi \end{pmatrix} \quad (6.103)$$

$$\beta \tilde{\psi} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ -\eta \end{pmatrix}, \quad (6.104)$$

si ottiene un sistema di equazioni accoppiate per  $\varphi$  e  $\eta$

$$\left( i\frac{\partial}{\partial t} + e\phi \right) \varphi = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \eta \quad (6.105)$$

$$\left( i\frac{\partial}{\partial t} + e\phi + 2m \right) \eta = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \varphi. \quad (6.106)$$

Utilizziamo ora di nuovo l'approssimazione non relativistica, per cui:

$$\left( i\frac{\partial}{\partial t} - e\phi + 2m \right) \eta \approx 2m\eta \quad (6.107)$$

e quindi

$$\eta \approx \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})}{2m} \varphi. \quad (6.108)$$

L'equazione (6.108) mostra che  $\eta$  è la componente piccola di  $\tilde{\psi}$ , essendo di ordine  $p/m$  rispetto a  $\varphi$ .

Sostituendo la (6.108) nella (6.105) si ottiene l'equazione per  $\varphi$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + e\phi \right) \varphi = \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})]^2}{2m} \varphi, \quad (6.109)$$

che può essere riscritta in una forma più familiare usando la relazione

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})]^2 &= (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} + e\mathbf{A})] \\ &= (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + ie\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}) \\ &= (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + e\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \nabla) \\ &= (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + e\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}, \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{A})$  è il campo magnetico. Si ottiene così la

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} + e\phi \right) \varphi = \left[ \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \varphi, \quad (6.110)$$

cioè l'equazione di Schrödinger per una particella con carica elettrica  $-e$  e spin  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}/2$ , in interazione col campo elettromagnetico descritto dai potenziali  $\phi$  e  $\mathbf{A}$ .

L'ultimo termine nel secondo membro dell'equazione (6.110) è l'energia di interazione tra il campo magnetico  $\mathbf{B}$  ed un dipolo magnetico di momento

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{-e}{2m} \boldsymbol{\sigma} = g \frac{-e}{2m} \mathbf{s}. \quad (6.111)$$

Il coefficiente  $g$  prende il nome di *fattore giromagnetico* ed esprime il rapporto tra il momento magnetico, espresso in magnetoni di Bohr, ed il momento angolare corrispondente.

L'interazione completa con il campo magnetico si ottiene esplicitando nella (6.110) il potenziale vettore corrispondente ad un campo costante lungo l'asse  $z$ :

$$\mathbf{A} = \frac{B}{2} (-y, x, 0); \quad \nabla \cdot \mathbf{A}; \quad \text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Trascurando termini di ordine  $B^2$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{e}{2m} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) + \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{e\mathbf{B}}{2m} (x p_y - y p_x) + \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{e}{2m} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (6.112)$$

Il termine che contiene il momento orbitale fornisce la spiegazione quantistica dell'effetto Zeeman normale. L'emissione o assorbimento di un fotone obbedisce alla regola di selezione  $\Delta L_z = \pm 1, 0$ . Per gli atomi in cui  $L_z$  è un buon numero quantico, la linea spettrale in presenza del campo magnetico si divide in tre componenti distanziate di  $\pm eB/2m, 0$ , che restituisce proprio la frequenza di Larmor (5.74). Negli atomi complessi, tuttavia,  $L_z$  ed  $S_z$  non sono separatamente diagonali e la differenza tra i livelli coinvolti nella transizione è funzione anche del fattore giromagnetico di spin [8]. La (6.111) descrive correttamente il comportamento dell'elettrone: si trova  $g = 2$ , come originariamente ipotizzato da S. A. Goudsmit e G. Uhlenbeck per spiegare l'effetto Zeeman anomalo.

Il risultato (6.112) costituisce uno straordinario successo della teoria di Dirac, nella quale il termine d'interazione spin-campo magnetico, che nella Meccanica Quantistica non Relativistica deve essere aggiunto *ad hoc* all'equazione di Schrödinger, emerge in modo naturale dalla sostituzione minimale quantistica applicata all'equazione di Dirac libera.

## 6.2 L'atomo d'idrogeno relativistico

Discutiamo in questa Sezione lo spettro dell'atomo d'idrogeno a partire dall'equazione di Dirac (nella trattazione originale di Dirac [8], cfr. anche L. Schiff [9]). Il calcolo nel limite non-relativistico, basato sull'equazione di Schrödinger, è riportato in Appendice A.5. Come in quel caso, il punto di partenza è la decomposizione dell'Hamiltoniana in coordinate polari.