Soluzioni degli esercizi del foglio n.1 – a.a. 2013-4

1.

(a) Ricordando che, per definizione, un operatore unitario ha per dominio e per immagine l'intero spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, è sufficiente mostrare che la corrispondenza $|\phi\rangle \to U|\phi\rangle$ è biunivoca, ovvero che $|U\,\psi\rangle = |U\,\phi\rangle \;\Rightarrow\; |\psi\rangle = |\phi\rangle$. Infatti $|U\,\psi\rangle = |U\,\phi\rangle \;\Rightarrow\; 0 = \langle U\phi - U\psi|U\phi - U\psi\rangle = \langle U\phi|U\phi\rangle + \langle U\psi|U\psi\rangle - (\langle U\phi|U\psi\rangle + \langle U\psi|U\phi\rangle) = \ldots = \langle \phi - \psi|\phi - \psi\rangle \;\Rightarrow\; |\psi\rangle = |\phi\rangle$.

(b) Se $|\phi\rangle = \alpha\,|x\rangle + \beta\,|y\rangle$, usando l'esistenza dell'inverso per ogni $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ possiamo scrivere $\langle\psi|U\phi\rangle = \langle U^{-1}\psi|\phi\rangle = \langle U^{-1}\psi|\alpha\,x + \beta\,y\rangle = \alpha\,\langle U^{-1}\psi|x\rangle + \beta\,\langle U^{-1}\psi|y\rangle = \alpha\,\langle\psi|Ux\rangle + \beta\,\langle\psi|Uy\rangle$, da cui $U|\alpha\,x + \beta\,y\rangle = \alpha\,|Ux\rangle + \beta|Uy\rangle$.

2.

(a) Da $U\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle$ e $\langle U\psi|U\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$ segue $\langle\psi|\psi\rangle = \langle U\psi|U\psi\rangle = |\lambda|^2\,\langle\psi|\psi\rangle$, da cui $|\lambda| = 1$.

(b) Sia $U|\psi_1\rangle = \lambda_1\,|\psi_1\rangle$ e $U|\psi_2\rangle = \lambda_2\,|\psi_2\rangle$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Allora $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle U\psi_1|U\psi_2\rangle = \lambda_1^*\,\lambda_2\,\langle\psi_1|\psi_2\rangle$, con $\lambda_1^*\,\lambda_2 \neq 1$ perché $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Dunque deve essere $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$.

3.

Posto $\widehat{A} = A - \langle A\rangle$ e $\widehat{B} = B - \langle B\rangle$, $\widehat{A}^\dagger = \widehat{A}$ e $\widehat{B}^\dagger = \widehat{B}$. Si osservi poi che l'anticommutatore di due operatori hermitiani è pur'esso hermitiano, dunque ha valori medi reali, mentre il commutatore di due operatori hermitiani è anti-hermitiano, dunque ha valori medi immaginari puri, e ancora che $[\widehat{A}\,,\,\widehat{B}] = [A\,,\,B]$. Allora, sfruttando anche la disuguaglianza di Schwarz:

$$||\psi||^4\;\sigma_A^2\,\sigma_B^2 = \langle\psi|\widehat{A}^2|\psi\rangle\;\langle\psi|\widehat{B}^2|\psi\rangle = ||\widehat{A}|\psi\rangle||^2\;||\widehat{B}|\psi\rangle||^2 \geq |\langle\widehat{A}\psi|\widehat{B}\psi\rangle|^2 = |\langle\psi|\widehat{A}\,\widehat{B}|\psi\rangle|^2 =$$

$$\frac{1}{4}|\langle\psi|\{\widehat{A}\,,\,\widehat{B}\}|\psi\rangle + \langle\psi|[\widehat{A}\,,\,\widehat{B}]|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4}(|\langle\psi|\{\widehat{A}\,,\,\widehat{B}\}|\psi\rangle|^2 + |\langle\psi|[A\,,\,B]|\psi\rangle|^2) \geq \frac{1}{4}\;|\langle\psi|[A\,,\,B]|\psi\rangle|^2\,,$$

da cui

$$\sigma_A\;\sigma_B \geq \frac{1}{2}\;|\langle\,[A\,,\,B]\,\rangle|\,,$$

ed in particolare, posto $A = X$, $B = H$ e ricordando che $[X\,,\,P] = i\,\hbar$:

$$\sigma_X\;\sigma_H \geq \frac{1}{2}\;|\langle\,[X\,,\,H]\,\rangle| = \frac{1}{4m}\,|\langle\,[X\,,\,P^2]\,\rangle| = \frac{\hbar}{2m}\,|\langle P\rangle|\,.$$

4.

(a) La condizione non banale proviene da $[P_\alpha\,,\,P_\beta]=0$, che impone, con ovvio significato dei simboli, $\partial_\alpha\,f_\beta(\vec{x})-\partial_\beta\,f_\alpha(\vec{x})=0$, ovvero $\vec{\nabla}\times\vec{f}=0$, da cui si ricava (in $\mathbf{R}^3$ che è semplicemente connesso) $\vec{f}=\vec{\nabla}g$, dove $g(\vec{x})$ è un'opportuna funzione scalare delle coordinate.
(b) Se consideriamo l'operatore definito dalla seguente trasformazione della funzione d'onda:

$$\psi'(\vec{x})=e^{i\,\alpha(\vec{x})}\psi(\vec{x})\,,$$

dove $\alpha(\vec{x})$ è una funzione delle coordinate spaziali, è immediato verificare che si tratta di un operatore unitario:

$$\langle\phi'|\psi'\rangle=\int d^3x[\phi'(\vec{x})]^*\psi'(\vec{x})=\int d^3x\,e^{-i\,\alpha(\vec{x})}\,\phi^*(\vec{x})\,\psi(\vec{x})\,e^{i\,\alpha(\vec{x})}=\langle\phi|\psi\rangle\,,$$

che definisce una trasformazione unitaria sotto la quale posizione ed impulso trasformano nel modo seguente:

$$\vec{X}'=\vec{X}\,,\qquad \vec{P}'=\vec{P}-\hbar\,\vec{\nabla}\alpha(\vec{X})\,.$$

Basterà allora scegliere $\alpha(\vec{x})=g(\vec{x})$ per avere

$$\vec{X}'\,\psi(\vec{x})=\vec{x}\,\psi(\vec{x})\,,\qquad \vec{P}'\,\psi(\vec{x})=-i\,\hbar\,\vec{\nabla}\,\psi(\vec{x})\,.$$

5.

Le equazioni di Heisenberg per gli operatori $X_H(t)$ e $P_H(t)$ sono:

$$i\,\hbar\,\frac{dX_H(t)}{dt}=[X_H(t)\,,\,H]\,,\qquad i\,\hbar\,\frac{dP_H(t)}{dt}=[P_H(t)\,,\,H]\,,$$

Da $H=P^2/(2\,m)$ segue subito $[X_H(t)\,,\,H]=i\,\hbar\,P_H(t)/m$, $[P_H(t)\,,\,H]=0$, da cui:

$$\frac{dX_H(t)}{dt}=\frac{P_H(t)}{m}\,,\qquad \frac{dP_H(t)}{dt}=0\,,$$

che, risolte con le condizioni iniziali $X_H(t_0)=X_S$, $P_H(t_0)=P_S$, danno:

$$P_H(t)=P_S\,,\qquad X_H(t)=X_S+\frac{P_S}{m}\,(t-t_0)\,.$$