Soluzioni degli esercizi del foglio n.10 – a.a. 2013-4

46.

Con ovvio significato dei simboli nei passaggi intermedi, e sfruttando l'algebra di Dirac:

$$[[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^\rho] = \mu\nu\rho - \nu\mu\rho - \rho\mu\nu + \rho\nu\mu$$

$$= (\mu\nu\rho + \mu\rho\nu) + (-\nu\mu\rho - \nu\rho\mu) + (-\rho\mu\nu - \mu\rho\nu) + (\rho\nu\mu + \nu\rho\mu) = 4(\gamma^\mu\eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu\eta^{\mu\rho}) ,$$

da cui segue il risultato intermedio

$$[\Sigma^{\mu\nu} , \gamma^\rho] = i\ (\gamma^\mu\eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu\eta^{\mu\rho})\ .$$

A questo punto, con tecnica simile:

$$[\Sigma^{\mu\nu} , [\gamma^\rho, \gamma^\sigma]] = [\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho]\gamma^\sigma + \gamma^\rho[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\sigma] - [\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\sigma]\gamma^\rho - \gamma^\sigma[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = \dots ,$$

da cui, sfruttando il il risultato intermedio, segue subito il risultato cercato.

47.

$$\left(\gamma^0\right)^2 = \frac{\{\gamma^0, \gamma^0\}}{2} = \eta^{00} = +1 ,$$

$$\left(\gamma^i\right)^2 = \frac{\{\gamma^i, \gamma^i\}}{2} = \eta^{ii} = -1 , \quad (i = 1, 2, 3) .$$

Scegliendo per comodità un indice spaziale $i \neq \mu$, e sfruttando l'algebra di Dirac e le proprietà cicliche della traccia:

$$tr\, \gamma^\mu = -tr\, [\gamma^\mu(\gamma^i)^2] = -tr\, [\gamma^\mu\gamma^i\gamma^i] = +tr\, [\gamma^i\gamma^\mu\gamma^i] = +tr\, [(\gamma^i)^2\gamma^\mu] = -tr\, \gamma^\mu \Rightarrow tr\, \gamma^\mu = 0 ,$$

$$\left(\gamma^5\right)^2 = (-i)\, \gamma^0\, \gamma^1\, \gamma^2\, \gamma^3\, (-i)\, \gamma^0\, \gamma^1\, \gamma^2\, \gamma^3 =$$

$$-\gamma^0\, \gamma^1\, \gamma^2\, \gamma^3\, \gamma^0\, \gamma^1\, \gamma^2\, \gamma^3 = \gamma^1\, \gamma^2\, \gamma^3\, \gamma^1\, \gamma^2\, \gamma^3 = -\gamma^1\, \gamma^2\, \gamma^1\, \gamma^2 = -(\gamma^1)^2 = 1 ,$$

$$\left\{\gamma^5 , \gamma^\mu\right\} = (-i)\ \left\{\gamma^0\, \gamma^1\, \gamma^2\, \gamma^3 , \gamma^\mu\right\} = (-i)(\gamma^0\, \gamma^1\, \gamma^2\, \gamma^3\, \gamma^\mu + \gamma^\mu\, \gamma^0\, \gamma^1\, \gamma^2\, \gamma^3) =$$

$$(-i)(\gamma^0\, \gamma^1\, \gamma^2\, \gamma^3\, \gamma^\mu - \gamma^0\, \gamma^1\, \gamma^2\, \gamma^3\, \gamma^\mu) = 0 .$$

48.

Nel caso a massa nulla ($m=0$) abbiamo l'invarianza per due fattori $U(1)$ indipendenti:

$$\psi_L' = e^{-i\alpha_L}\,\psi_L\,, \quad \psi_R' = e^{-i\alpha_R}\,\psi_R\,.$$

Ricordando la decomposizione di $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = i\,\bar\psi_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + i\,\bar\psi_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R$$

e la forma delle variazioni infinitesime corrispondenti alle due trasformazioni $U(1)$:

$$\begin{array}{lll} U(1)_L: & \delta\psi_L = -i\alpha_L\,\psi_L\,, & \delta\psi_R = 0\,, \\ U(1)_R: & \delta\psi_L = 0\,, & \delta\psi_R = -i\alpha_R\,\psi_R\,, \end{array}$$

si trova

$$\begin{aligned} j_L^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_L)}\left(\frac{\delta\psi_L}{\alpha_L}\right) = i\,\bar\psi_L\gamma^\mu(-i\psi_L) \\ &= \bar\psi_L\gamma^\mu\psi_L = \frac{1}{2}\bar\psi\gamma^\mu(1+\gamma_5)\psi\,, \end{aligned}$$

e analogamente

$$j_R^\mu = \bar\psi_R\gamma^\mu\psi_R = \frac{1}{2}\bar\psi\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi\,.$$

Dunque

$$\begin{aligned} j_V^\mu &= j_R^\mu + j_L^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\psi\,, \\ j_A^\mu &= j_R^\mu - j_L^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi\,. \end{aligned}$$

j_V^μ è conservata sempre ($\partial_\mu j_V^\mu = 0$), mentre j_A^μ è conservata se $m=0$, altrimenti l'equazione di Dirac implica che

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_A^\mu &= (\partial_\mu\bar\psi)\gamma^\mu\gamma_5\psi + \bar\psi\gamma^\mu\gamma_5(\partial_\mu\psi) \\ &= i\,m\,\bar\psi\gamma_5\psi + i\,m\,\bar\psi\gamma_5\psi \\ &= 2\,i\,m\,\bar\psi\gamma_5\psi\,. \end{aligned} \tag{1}$$

49.

Il trasformato di Lorentz della corrente $j^\mu(x)$ è

$$j^{\mu\prime}(x') = \bar\psi'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar\psi(x)\,S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda)\,\psi(x)\,,$$

dove abbiamo usato la legge di trasformazione per uno spinore di Dirac: $\psi'(x') = S(\Lambda)\,\psi(x)$.

Da $S(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda)^{-1} = \gamma^\mu\Lambda_\mu{}^\nu$ segue $\gamma^\nu = S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda)\,\Lambda_\mu{}^\nu$ e dunque $\Lambda^\rho{}_\nu\gamma^\nu = S(\Lambda)^{-1}\gamma^\rho S(\Lambda)$, da cui infine

$$j^{\mu\prime}(x') = \Lambda^\mu{}_\nu\,j^\nu(x)\,.$$

50.

L'hermitiano coniugato della Lagrangiana di Dirac è (se $m \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^\dagger &= \Big[\bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi\Big]^\dagger \\
&= -i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0\psi - m\,\psi^\dagger\gamma^0\psi \\
&= -i\partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi - m\,\bar\psi\psi \\
&= \bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - i\partial_\mu(\bar\psi\gamma^\mu\psi)\,.
\end{aligned}$$

Dunque $\mathcal{L}^\dagger \neq \mathcal{L}$, mentre per l'azione si ha

$$\int d^4x\,\mathcal{L}^\dagger = \int d^4x\,\mathcal{L} - i\int d^4x\,\partial_\mu(\bar\psi\gamma^\mu\psi) = \int d^4x\,\mathcal{L}\,,$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dall'ipotesi che i campi si annullino all'infinito con sufficiente rapidità.