Soluzioni degli esercizi del foglio n.11 – a.a. 2013-4

51.

Sottintendendo per semplicità l'indice $\alpha = 1, 2$:

$$(\not{k} - m)\, u(\vec{k}) \propto (\not{k} - m)\,(\not{k} + m)\, u = (k^2 - m^2)\, u = 0$$

$$(\not{k} + m)\, v(\vec{k}) \propto (\not{k} + m)\,(\not{k} - m)\, v = (k^2 - m^2)\, v = 0$$

$$\lim_{\vec{k}\to 0} u(\vec{k}) = \frac{1+\gamma^0}{2}\, u = u \qquad \lim_{\vec{k}\to 0} v(\vec{k}) = \frac{1-\gamma^0}{2}\, v = v$$

Inoltre

$$\overline{u}^{(1)} = u^{(1)\,\dagger}\gamma^0 = (1, 0, 0, 0) \qquad \overline{u}^{(2)} = u^{(2)\,\dagger}\gamma^0 = (0, 1, 0, 0)$$

$$\overline{v}^{(1)} = v^{(1)\,\dagger}\gamma^0 = (0, 0, -1, 0) \qquad \overline{v}^{(2)} = v^{(2)\,\dagger}\gamma^0 = (0, 0, 0, -1)$$

e, sottintendendo ancora per semplicità l'indice $\alpha = 1, 2$:

$$\overline{u}(\vec{k}) = u^\dagger\, \frac{(\not{k} + m)^\dagger \gamma^0}{\sqrt{2m(m+\omega_{\vec{k}})}} = \overline{u}\, \frac{(\not{k} + m)}{\sqrt{2m(m+\omega_{\vec{k}})}}$$

$$\overline{v}(\vec{k}) = v^\dagger\, \frac{(-\not{k} + m)^\dagger \gamma^0}{\sqrt{2m(m+\omega_{\vec{k}})}} = \overline{v}\, \frac{(-\not{k} + m)}{\sqrt{2m(m+\omega_{\vec{k}})}}$$

52.

Nei primi quattro casi abbiamo a che fare con uno scalare di Lorentz, dunque possiamo effettuare il calcolo nel sistema di riferimento di riposo, $\vec{k} = 0$, in cui il risultato è evidente noti i risultati dell'esercizio precedente. Nel quinto caso possiamo scrivere, ricordando che $(\not{k} - m)\, u = (\not{k} + m)\, v = 0$ e $\overline{u}\,(\not{k} - m) = \overline{v}\,(\not{k} + m) = 0$:

$$u^{(\alpha)\,\dagger}(\vec{k})\; u^{(\beta)}(\vec{k}) = \overline{u}^{(\alpha)}(\vec{k})\,\gamma^0\; u^{(\beta)}(\vec{k}) = \overline{u}^{(\alpha)}(\vec{k})\, \frac{\{\not{k}, \gamma^0\}}{2m}\; u^{(\beta)}(\vec{k}) = \overline{u}^{(\alpha)}(\vec{k})\, \frac{2\omega_{\vec{k}}}{2m}\; u^{(\beta)}(\vec{k}) = \frac{\omega_{\vec{k}}}{m}\, \delta_{\alpha\beta}$$

$$v^{(\alpha)\,\dagger}(\vec{k})\; v^{(\beta)}(\vec{k}) = \overline{v}^{(\alpha)}(\vec{k})\,\gamma^0\; v^{(\beta)}(\vec{k}) = -\overline{v}^{(\alpha)}(\vec{k})\, \frac{\{\not{k}, \gamma^0\}}{2m}\; v^{(\beta)}(\vec{k}) = -\overline{v}^{(\alpha)}(\vec{k})\, \frac{2\omega_{\vec{k}}}{2m}\; v^{(\beta)}(\vec{k}) = \frac{\omega_{\vec{k}}}{m}\, \delta_{\alpha\beta}$$

53.

Da

$$\gamma^5 P_L = P_L \gamma^5 , \qquad \gamma^5 P_R = P_R \gamma^5 , \qquad \gamma^\mu P_L = P_R \gamma^\mu , \qquad \gamma^\mu P_R = P_L \gamma^\mu ,$$

segue

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi = \overline{\psi_L}\gamma^\mu\gamma^5\psi_L + \overline{\psi_R}\gamma^\mu\gamma^5\psi_R .$$

54.

Per $\vec{k} = 0$ ed in rappresentazione di Dirac

$$u^{(1)}\overline{u}^{(1)} + u^{(2)}\overline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0\ 1\ 0\ 0) = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{pmatrix} = \frac{1+\gamma^0}{2} = \Lambda_+(\vec{0})$$

$$v^{(1)}\overline{v}^{(1)} + v^{(2)}\overline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0\ 0\ -1\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0\ 0\ 0\ -1) = \begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix} = \frac{\gamma^0 - 1}{2} = -\Lambda_-(\vec{0})$$

Inoltre, per $\vec{k} \neq 0$ e $k^0 = \omega_{\vec{k}}$:

$$(\not{k} + m)\,\gamma^0\,(\not{k} + m) = (\not{k} + m)\,(\gamma^0\,\gamma^\mu k_\mu + \gamma^0 m) = (\not{k} + m)\,(2\eta^{0\mu}k_\mu - \gamma^\mu\,\gamma^0 k_\mu + \gamma^0 m) =$$

$$= (\not{k} + m)\,(2\omega_{\vec{k}} - \not{k}\,\gamma^0 + \gamma^0 m) = 2\omega_{\vec{k}}\,(\not{k} + m) - (\not{k} + m)(\not{k} - m)\gamma^0 = 2\omega_{\vec{k}}\,(\not{k} + m)$$

e analogamente per l'altra identità con tutti segni meno. Allora:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} u^{(\alpha)}(\vec{k})\,\overline{u}^{(\alpha)}(\vec{k}) = \frac{1}{2m(\omega_{\vec{k}} + m)} \sum_{\alpha=1}^{2} (\not{k} + m)\,u^{(\alpha)}\,\overline{u}^{(\alpha)}\,(\not{k} + m) =$$

$$= \frac{(\not{k} + m)\,\frac{1+\gamma^0}{2}\,(\not{k} + m)}{2m(\omega_{\vec{k}} + m)} = \frac{m\,(\not{k} + m) + \omega_{\vec{k}}\,(\not{k} + m)}{2m(\omega_{\vec{k}} + m)} = \frac{\not{k} + m}{2m} = \Lambda_+(\vec{k})$$

e analogamente per la seconda identità.

55.

Nel limite $m = 0$ avremo $\not{k}u(\vec{k}) = \not{k}v(\vec{k}) = 0$, dunque $\not{k}\psi(\vec{k}) = 0$. Si osservi che:

$$\gamma^5\gamma^0\not{k} = \gamma^5 k^0 - \gamma^5\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{k} = \gamma^5\,|\vec{k}| + 2\,\vec{k}\cdot\vec{S} .$$

Allora, sottintendendo l'azione su $\psi(\vec{k})$:

$$\gamma^5 = -\frac{2\,\vec{k}\cdot\vec{S}}{|\vec{k}|} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 \pm \gamma^5}{2} = \frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{2\,\vec{k}\cdot\vec{S}}{|\vec{k}|}\right) ,$$

ovvero chiralità L (R) ed elicità $-1/2$ ($+1/2$) coincidono.