Soluzioni degli esercizi del foglio n.2 – a.a. 2013-4

6.

$$i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}|\psi_D(t)\rangle = i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\left[e^{\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t}\,|\psi_S(t)\rangle\right] = e^{\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t}\,i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi_S(t)\rangle + i\,\hbar\,\left(\frac{\partial}{\partial t}\,e^{\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t}\right)|\psi_S(t)\rangle$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t}\,H_S\,|\psi_S(t)\rangle - H^{(0)}\,e^{\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t}|\psi_S(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t}\,H^{(0)}\,|\psi_S(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t}\,H_S^{(int)}\,|\psi_S(t)\rangle$$

$$-H^{(0)}\,e^{\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t}|\psi_S(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t}\,H_S^{(int)}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t}\,e^{\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t}\,|\psi_S(t)\rangle = H_D^{(int)}\,|\psi_D(t)\rangle$$

$$i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\mathcal{O}_D(t) = i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\left[e^{\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t}\,\mathcal{O}_S\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t}\right] = -H^{(0)}\,e^{\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t}\,\mathcal{O}_S\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t}$$

$$+e^{\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t}\,\mathcal{O}_S\,H^{(0)}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t} = e^{\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t}\,[\mathcal{O}_S\,,\,H^{(0)}]\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,H^{(0)}\,t} = [\mathcal{O}_D(t)\,,\,H^{(0)}]$$

7.

$$\frac{d\mathcal{O}_H}{dt} = \frac{d}{dt}(U^\dagger\,\mathcal{O}_S\,U) = \frac{dU^\dagger}{dt}\,\mathcal{O}_S\,U + U^\dagger\,\frac{\partial\mathcal{O}_S}{\partial t}\,U + U^\dagger\,\mathcal{O}_S\,\frac{dU}{dt} =$$

$$= \frac{i}{\hbar}\,H\,\mathcal{O}_H + \left(\frac{\partial\mathcal{O}}{\partial t}\right)_H - \frac{i}{\hbar}\,\mathcal{O}_H\,H = -\frac{i}{\hbar}\,[\mathcal{O}_H, H] + \left(\frac{\partial\mathcal{O}}{\partial t}\right)_H$$

8.

L'integrale di partenza è

$$I = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\,H(t_1)\,H(t_2)\,, \qquad (t_1 > t_2)\,.$$

Graficamente, la regione di integrazione si può rappresentare considerando il piano cartesiano con (ascissa,ordinata)$= (t_2, t_1)$. La bisettrice del primo quadrante ha equazione $t_1 = t_2$ e divide il quadrato di vertici (t_0, t_0), (t, t_0), (t, t) e (t_0, t) in due triangoli, la regione di integrazione è quello in alto a sinistra. Il medesimo integrale si può riscrivere, in modo equivalente, come:

$$I = \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_2}^{t} dt_1\,H(t_1)\,H(t_2) \qquad (t_1 > t_2)\,,$$

o anche, scambiando il nome delle variabili di integrazione:

$$I = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_1}^{t} dt_2\,H(t_2)\,H(t_1) \qquad (t_2 > t_1)\,.$$

A questo punto si può riscrivere l'integrale come

$$I = \frac{1}{2}\left[\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, \theta(t_1 - t_2)\, H(t_1)\, H(t_2) + \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_1}^{t} dt_2\, \theta(t_2 - t_1)\, H(t_2)\, H(t_1)\right],$$

e infine, grazie alle proprietà della θ di Heaviside, estendere l'integrazione a tutto il quadrato. In definitiva:

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2\, T\, H(t_1)\, H(t_2)\,.$$

9.

Lavorando per comodità in visuale di Heisenberg:

$$\frac{d}{dt}\langle X\, P\rangle = \langle \frac{dX}{dt}\, P\rangle + \langle X\, \frac{dP}{dt}\rangle = -\frac{i}{\hbar}\langle [X, H]\, P\rangle - \frac{i}{\hbar}\langle X\, [P, H]\rangle = 2\,\langle T\rangle - \langle X\, V'(X)\rangle\,.$$

Come dimostrato a lezione, in uno stato stazionario i valori medi non dipendono dal tempo, dunque in tal caso il primo membro si annulla e $2\,\langle T\rangle = \langle X\, V'(X)\rangle$. Per l''oscillatore armonico, da $V(X) = (1/2)\, k\, X^2$ segue $X\, V'(X) = 2\, V(X)$, dunque $\langle T\rangle = \langle V\rangle$.

10.

(a) Sfruttando il fatto che $a\,|0\rangle = 0$:

$$a\,|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2}\,[a\,,\, e^{\lambda\, a^\dagger}]\,|0\rangle\,.$$

Il commutatore vale:

$$[a\,,\, e^{\lambda\, a^\dagger}] = [a\,,\, a^\dagger]\frac{de^{\lambda\, a^\dagger}}{da^\dagger} = \lambda\, e^{\lambda\, a^\dagger}\,.$$

Allora:

$$a\,|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2}\,\lambda\, e^{\lambda\, a^\dagger}\,|0\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle\,.$$

Inoltre, tenendo conto che $(a^\dagger)^m\,|0\rangle = \sqrt{m!}\,|m\rangle$:

$$\langle\lambda|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2}\langle 0|\, e^{\lambda^*\, a} e^{\lambda\, a^\dagger}\,|0\rangle = e^{-|\lambda|^2}\sum_{m,n}\frac{(\lambda^*)^n\,\lambda^m}{n!\, m!}\langle 0|\, a^n\,(a^\dagger)^m\,|0\rangle$$

$$= e^{-|\lambda|^2}\sum_{m,n}\frac{(\lambda^*)^n\,\lambda^m}{\sqrt{n!\, m!}}\langle n|m\rangle = e^{-|\lambda|^2}\sum_{m}\frac{(|\lambda|^2)^m}{m!} = e^{-|\lambda|^2}\, e^{|\lambda|^2} = 1\,.$$

(b) Basterà dimostrare che $\widehat{Q}\,|\psi\rangle = c\,\widehat{P}\,|\psi\rangle$, con $c^* = -c$.

$$Q\,|\lambda\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\,\omega}}\, q\,|\lambda\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,(a + a^\dagger)\,|\lambda\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,(\lambda + a^\dagger)\,|\lambda\rangle\,,$$

$$\langle Q\rangle = \langle\lambda|\, Q\,|\lambda\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,\langle\lambda|\,(a+a^\dagger)\,|\lambda\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,(\lambda+\lambda^*)\,,$$

$$\widehat{Q}\,|\lambda\rangle = (Q-\langle Q\rangle)\,|\lambda\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,(a^\dagger-\lambda^*)\,|\lambda\rangle\,,$$

$$P\,|\lambda\rangle = i\sqrt{\frac{m\,\hbar\,\omega}{2}}\,(a^\dagger-a)\,|\lambda\rangle = i\sqrt{\frac{m\,\hbar\,\omega}{2}}\,(a^\dagger-\lambda)\,|\lambda\rangle\,,$$

$$\langle P\rangle = \langle\lambda|\,P\,|\lambda\rangle = i\sqrt{\frac{m\,\hbar\,\omega}{2}}\,(\lambda^*-\lambda)\,,$$

$$\widehat{P}\,|\lambda\rangle = (P-\langle P\rangle)\,|\lambda\rangle = i\sqrt{\frac{m\,\hbar\,\omega}{2}}\,(a^\dagger-\lambda^*)\,|\lambda\rangle\,,$$

ed è ora evidente che $\widehat{Q}\,|\lambda\rangle = c\;\widehat{P}\,|\lambda\rangle$ con $c=-c^*=-i/(m\,\omega)$.

(c)

$$f(n) = \langle n|\lambda\rangle = \langle n|\,e^{-|\lambda|^2/2}\,e^{\lambda\,a^\dagger}\,|0\rangle = e^{-|\lambda|^2/2}\sum_m \frac{\lambda^m}{m!}\,\langle n|(a^\dagger)^m\,|0\rangle$$

$$= e^{-|\lambda|^2/2}\sum_m \frac{\lambda^m}{m!}\,\sqrt{m!}\,\langle n|m\rangle = e^{-|\lambda|^2/2}\,\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\,,$$

da cui

$$|f(n)|^2 = e^{-|\lambda|^2}\,\frac{(|\lambda|^2)^n}{n!}\,,$$

che è una distribuzione di Poisson. Per trovare il valore $\overline{n}$ che massimizza $|f(n)|^2$ osserviamo che

$$\frac{|f(n)|^2}{|f(n-1)|^2} = \frac{|\lambda|^2}{n}\,.$$

Allora $|f(n)|^2$ è massimo quando n è eguale alla parte intera di $|\lambda|^2$.

(d) Ricordando che $E_n = \hbar\,\omega\,(n+1/2)$, avremo:

$$|\lambda(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\,H\,t}\,|\lambda\rangle = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}\,H\,t}\,f(n)\,|n\rangle = \sum_n e^{-i\,\omega\,(n+1/2)\,t}\,e^{-|\lambda|^2/2}\,\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$$

$$= e^{-i\,\omega\,t/2}\sum_n e^{-|\lambda\,e^{-i\,\omega\,t/2}|^2/2}\,\frac{(e^{-i\,\omega\,t}\,\lambda)^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle = e^{-i\,\omega\,t/2}\;|\lambda\,e^{-i\,\omega\,t}\rangle\,.$$

Allora:

$$a\,|\lambda(t)\rangle = e^{-i\,\omega\,t/2}\,a\;\;|\lambda\,e^{-i\,\omega\,t}\rangle\,. = (\lambda\,e^{-i\,\omega\,t})\,e^{-i\,\omega\,t/2}\,|\lambda\,e^{-i\,\omega\,t}\rangle = (\lambda\,e^{-i\,\omega\,t})\,|\lambda(t)\rangle\,.$$