Soluzioni degli esercizi del foglio n.4 – a.a. 2013-4

16.

Abbiamo visto che per un sistema a due stati:

$$i\,\hbar\,\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12}\,e^{i\,\omega_{12}\,t} \\ V_{21}\,e^{i\,\omega_{21}\,t} & V_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

con $\omega_{12} = (E_1 - E_2)/\hbar = -\omega_{21}$ e $V_{ba} \equiv \langle b|V|a\rangle$. Nel nostro caso:

$$V_{11} \equiv \langle 1|V|1\rangle = 0\,, \quad V_{22} \equiv \langle 2|V|2\rangle = 0\,, \quad V_{12} \equiv \langle 1|V|2\rangle = \gamma\,e^{i\,\omega\,t}\,, \quad V_{21} \equiv \langle 2|V|1\rangle = \gamma\,e^{-i\,\omega\,t}\,.$$

Allora, posto $\epsilon = -(\omega + \omega_{12}) = -(\omega - \omega_{21})$:

$$i\,\hbar\,\frac{dc_1}{dt} = \gamma\,e^{-i\,\epsilon\,t}\,c_2\,, \qquad i\,\hbar\,\frac{dc_2}{dt} = \gamma\,e^{i\,\epsilon\,t}\,c_1\,.$$

Derivando ancora una volta la prima equazione e sostituendovi la seconda, si ottiene:

$$\frac{d^2c_1}{dt^2} + i\,\epsilon\,\frac{dc_1}{dt} + \frac{\gamma^2}{\hbar^2}\,c_1 = 0\,,$$

la cui soluzione generale è

$$c_1(t) = e^{-i\,\frac{\epsilon}{2}\,t}\left(\alpha_+\,e^{i\,\Omega\,t} + \alpha_-\,e^{-i\,\Omega\,t}\right)\,, \qquad \Omega = \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \frac{\gamma^2}{\hbar^2}}\,,$$

e le due costanti di integrazione $\alpha_\pm$ si possono determinare imponendo la condizione iniziale $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$, ovvero $c_1(0) = 1$ e $c_2(0) = 0$:

$$\alpha_\pm = \frac{\Omega \pm \frac{\epsilon}{2}}{2\,\Omega}\,.$$

In conclusione:

$$c_2(t) = -i\,e^{-i\,\frac{\epsilon}{2}\,t}\,\frac{\gamma}{\hbar}\,\frac{\sin\Omega\,t}{\Omega}\,, \qquad c_1(t) = e^{-i\,\frac{\epsilon}{2}\,t}\left[\cos\Omega\,t + i\,\frac{\epsilon}{2\,\Omega}\,\sin\Omega\,t\right]\,.$$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\gamma^2}{\hbar^2}\,\frac{\sin^2\Omega\,t}{\Omega^2}\,, \qquad |c_1(t)|^2 = 1 - |c_2(t)|^2\,.$$

Espandendo il risultato esatto scritto sopra al primo ordine in γ, ed osservando che

$$\Omega = \frac{\epsilon}{2}\,\left[1 + \mathcal{O}(\gamma^2)\right]\,,$$

si ottiene:

$$c_2(t) \simeq -\frac{\gamma}{\hbar}\,\frac{e^{i\,\epsilon\,t} - 1}{\epsilon}\,, \qquad |c_2(t)|^2 \simeq \frac{\gamma^2}{\hbar^2}\,\frac{\sin^2\frac{\epsilon\,t}{2}}{\frac{\epsilon^2}{4}}\,.$$

Applicando il metodo perturbativo, troviamo al primo ordine:

$$c_2(t) \simeq -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1\,e^{i\,\omega_{21}\,t_1}\,V_{21}(t_1) = -i\,\frac{\gamma}{\hbar}\int_0^t dt_1\,e^{i\,(\omega_{21}-\omega)\,t_1} = -\frac{\gamma}{\hbar}\,\frac{e^{i\,\epsilon\,t} - 1}{\epsilon}\,,$$

in accordo con l'espansione del risultato esatto.

17.

La condizione iniziale è $c_b(0) = \delta_{ba}$. Con tale condizione, si ottiene l'equazione integrale

$$c_b(t) = c_b(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \, W_{ba}(t') \, c_a(t') \, .$$

Partendo dalla soluzione all'ordine zero, $c_b^{(0)}(t) = c_b(0) = \delta_{ba}$, sostituendo a secondo membro, risolvendo e iterando, si ottiene:

$$c_b(t) = \delta_{ba} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_0^t dt_1 \, W_{ba}(t_1) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \, W_{bc}(t_1) \, W_{ca}(t_2) \, ,$$

nella convenzione in cui gli indici ripetuti sono sommati.

18.

(a)

$$|c_f(t)|^2 = 4 \, \frac{|V_{fi}|^2}{\hbar^2} \left(\frac{\sin \frac{\omega_{fi} t}{2}}{\frac{\omega_{fi}}{2}} \right)^2 \, .$$

(b) Poiché $\overline{\sin^2 x} = 1/2$:

$$\overline{|c_f(t)|^2} = \frac{8 \, |V_{fi}|^2}{\hbar^2 \, \omega_{fi}^2} \, .$$

(c) Da $\overline{|c_f(t)|^2} \ll 1$ segue $|V_{fi}| \ll \hbar \, |\omega_{fi}|$.

19.

(a) La larghezza tipica di $|A_-(\omega, t)|^2$, pensata come funzione di ω, è $\Delta\omega \sim 1/t$. D'altro canto sarà $|A_+(\omega, t)|^2 \ll |A_-(\omega, t)|^2$ se $|\omega_{fi}| \gg \Delta\omega$. Le due condizioni combinate danno $|\omega_{fi}| \gg 1/t$, ovvero

$$t \gg \frac{1}{|\omega_{fi}|} \sim \frac{1}{\omega} \, .$$

(b) Se $\varphi(x)$ è una funzione di prova:

$$\lim_{t \to \infty} \int dx \, \frac{(\sin \, x \, t)^2}{x^2 \, t} \, \varphi(x) = \lim_{t \to \infty} \int dy \, \frac{(\sin \, y)^2}{y^2} \, \varphi\left(\frac{y}{t}\right) = \varphi(0) \, \int dy \, \frac{(\sin \, y)^2}{y^2} = \pi \, \varphi(0) \, ,$$

dove l'ultimo passaggio segue da:

$$\frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dp \, e^{i \, p \, y} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dq \, e^{-i \, q \, y} \, ,$$

che a sua volta implica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \frac{(\sin\, y)^2}{y^2} = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} dq \int_{-1}^{+1} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{i\,(p-q)\,y}$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} dq \int_{-1}^{+1} dp\, (2\pi)\, \delta(p-q) = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{+1} dq = \pi\,.$$

(c)

$$|c_f(t)|^2 \simeq \frac{|V_{fi}|^2}{\hbar^2}\, t^2\,.$$

Il risultato cresce quadraticamente nel tempo. Sarà una buona approssimazione per

$$|c_f(t)|^2 \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{|V_{fi}|^2}{\hbar^2}\, t^2 \ll 1 \quad \Rightarrow \quad t \ll \frac{\hbar}{|V_{fi}|}\,.$$

(d) Osservato che alla frequenza di risonanza $\epsilon = 0$ e $\Omega = |V_{fi}|/\hbar$:

$$|c_f(t)|^2 = \sin^2 \frac{|V_{fi}|}{\hbar}\, t\,.$$

20.

Dalla teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo sappiamo che, al primo ordine e per $n \neq 0$:

$$P_{n0}(\infty) = |c_{n0}(\infty)|^2\,, \qquad c_{n0}(\infty) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega_{n0} t}\, V_{n0}(t)\,,$$

dove

$$\omega_{n0} = \frac{E_n - E_0}{\hbar} = n\omega\,, \qquad V_{n0}(t) = \langle n|V(t)|0\rangle = \lambda\, e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}\, \langle n|X|0\rangle\,.$$

Osservato che

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, (a + a^\dagger)\,,$$

avremo

$$\langle n|X|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, \langle n|(a+a^\dagger)|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, \delta_{n1}\,, \qquad \langle n|V(t)|0\rangle = \lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, \delta_{n1}\, e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}\,.$$

Dunque:

$$c_{n0}(\infty) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\,n\,\omega\,t}\, \lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\, \delta_{n1}\, e^{-t^2/\tau^2} = \frac{-i\,\lambda}{\sqrt{2\,m\,\omega\,\hbar}}\, \delta_{n1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-t^2/\tau^2 + i\,\omega\,t} =$$

$$= \frac{-i\,\lambda}{\sqrt{2\,m\,\omega\,\hbar}}\, \delta_{n1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-(t/\tau - i\,\omega\,\tau/2)^2 - \omega^2\tau^2/4} = \frac{-i\,\lambda\,\delta_{n1}}{\sqrt{2\,m\,\omega\,\hbar}}\, e^{-\omega^2\tau^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-(t/\tau - i\,\omega\,\tau/2)^2} =$$

$$= \frac{-i\,\lambda\,\delta_{n1}}{\sqrt{2\,m\,\omega\,\hbar}}\, e^{-\omega^2\tau^2/4}\, \sqrt{\pi}\,\tau\,,$$

dove abbiamo sfruttato la formula dell'integrazione gaussiana $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-a\,(x+b)^2} = \sqrt{\pi/a}$, da cui

$$P_{n0}(\infty) = |c_{n0}(\infty)|^2 = \frac{\lambda^2\,\pi\,\tau^2}{2\,m\,\omega\,\hbar}\, \delta_{n1}\, e^{-\omega^2\tau^2/2}$$