Soluzioni degli esercizi del foglio n.6 – a.a. 2013-4

26.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\,\dot x + \frac{q}{c}\,A_x \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{q}{c}\,\vec v\cdot\partial_x\vec A - q\,\partial_x\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\dot x + \frac{q}{c}\,A_x\right) - \frac{q}{c}\,\vec v\cdot\partial_x\vec A + q\,\partial_x\varphi = 0$$

$$m\,\ddot x + \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\,\dot x + \frac{\partial A_x}{\partial y}\,\dot y + \frac{\partial A_x}{\partial z}\,\dot z\right) - \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\,\dot x + \frac{\partial A_y}{\partial x}\,\dot y + \frac{\partial A_z}{\partial x}\,\dot z\right) + q\,\partial_x\varphi = 0$$

$$m\,\ddot x = -q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial A_x}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}\,[\dot y(\partial_x A_y - \partial_y A_x) - \dot z(\partial_z A_x - \partial_x A_z)] = q\,E_x + \frac{q}{c}\,(\vec v\cdot\vec B)_x$$

$$m\,\frac{d\vec v}{dt} = q\left(\vec E + \frac{\vec v}{c}\times\vec B\right)$$

27.

$$L' = L + \frac{q}{c}\left(\vec v\cdot\vec\nabla\Lambda + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right) = L + \frac{q}{c}\,\frac{d\Lambda}{dt}$$

28.

L'equazione di Heisenberg per $\vec X$ è

$$\frac{d\vec X}{dt} = \frac{i}{\hbar}\,[H,\vec X]\,.$$

Per calcolare il commutatore osserviamo che

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec P^{\,2} - \frac{q}{c}\,(\vec A\cdot\vec P + \vec P\cdot\vec A) + \frac{q^2}{c^2}\,\vec A^{\,2}\right] + q\,\varphi$$

e, lavorando in componenti,

$$[\vec P^{\,2}, X] = -2i\hbar P_x\,, \qquad [\vec P\cdot\vec A, X] = [\vec A\cdot\vec P, X] = -i\hbar A_x\,,$$

con analoghe relazioni anche per Y e Z, da cui

$$[H,\vec X] = -\frac{i\hbar}{m}\left(\vec P - \frac{q}{c}\,\vec A\right)\,,$$

ovvero, sostituendo nell'equazione di Heisenberg:

$$m\,\frac{d\vec X}{dt} = \vec P - \frac{q}{c}\,\vec A\,.$$

29.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\,[H,\vec{V}] + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\,, \qquad \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = -\frac{q}{mc}\,\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,.$$

$$[H,\vec{V}] = \frac{m}{2}\,[\vec{V}^{\,2},\vec{V}] + q\,[\varphi,\vec{V}]\,, \qquad [\varphi,\vec{V}] = \frac{i\hbar}{m}\,\vec{\nabla}\varphi\,,$$

$$[V_i,V_j] = \frac{i\hbar q}{m^2 c}\,\epsilon_{ijk}\,B_k\,, \qquad [\vec{V}^{\,2},\vec{V}] = \frac{i\hbar q}{m^2 c}\,[\vec{B}\times\vec{V} - \vec{V}\times\vec{B}]\,.$$

Mettendo tutto assieme:

$$m\,\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{q}{2c}\,[\vec{V}\times\vec{B} - \vec{B}\times\vec{V}] + q\left[-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right].$$

Esprimendo tutto in termini di $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

$$m\,\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{q}{2c}\,[\vec{V}\times\vec{B} - \vec{B}\times\vec{V}] + q\,\vec{E}\,. \qquad (*)$$

Ripassando infine da $\vec{V}$ a $\vec{P}$

$$\vec{V}\times\vec{B}-\vec{B}\times\vec{V} = \frac{1}{m}\left[\left(\vec{P}-\frac{q}{c}\,\vec{A}\right)\times\vec{B} - \vec{B}\times\left(\vec{P}-\frac{q}{c}\,\vec{A}\right)\right] = \frac{1}{m}\,(\vec{P}\times\vec{B}-\vec{B}\times\vec{P}) - \frac{q}{mc}\,(\vec{A}\times\vec{B}-\vec{B}\times\vec{A})\,.$$

Basta ora inserire l'ultima espressione in (*) e osservare che $\vec{A}$ commuta con $\vec{B}$ per ottenere:

$$m\,\frac{d\vec{V}}{dt} = q\,\vec{E} + \frac{q}{2mc}\,(\vec{P}\times\vec{B} - \vec{B}\times\vec{P}) - \frac{q^2}{mc^2}\,(\vec{A}\times\vec{B})\,.$$

30.

Ritorniamo alla (*), prendiamo i valori medi su uno stato generico in visuale di Heisenberg e sfruttiamo il fatto che, se $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono uniformi nel volume del pacchetto d'onda:

$$\langle\vec{V}\times\vec{B}\rangle = \langle\vec{V}\rangle\times\vec{B} = -\vec{B}\times\langle\vec{V}\rangle = -\langle\vec{B}\times\vec{V}\rangle\,, \qquad \langle\vec{E}\rangle = \vec{E}\,.$$

Otterremo allora, in accordo con il teorema di Ehrenfest ed indipendentemente dalla visuale:

$$m\,\frac{d\langle\vec{V}\rangle}{dt} = q\left(\vec{E} + \frac{\langle\vec{V}\rangle}{c}\times\vec{B}\right).$$