Soluzioni degli esercizi del foglio n.7 – a.a. 2013-4

31.

Applichiamo la formula di Baker-Campbell-Hausdorff con $A = -(i/\hbar)\,\alpha\,X$ e $B = -(i/\hbar)\,\beta\,P$. Poiché $[X, P] = i\hbar$, bastano i primi tre termini dell'espansione ricordata nel testo:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}\,.$$

Osssrvato che $[A, B] = -(i/\hbar)\alpha\beta$, avremo:

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar}\,(\alpha\,X+\beta\,P)} = e^{\frac{i}{\hbar}\,\frac{\alpha\,\beta}{2}}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,\alpha\,X}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,\beta\,P}\,,$$

dunque:

$$X' \equiv U\,X\,U^{-1} = e^{-\frac{i}{\hbar}\,\alpha\,X}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,\beta\,P}\,X\,e^{\frac{i}{\hbar}\,\beta\,P}\,e^{\frac{i}{\hbar}\,\alpha\,X} = X-\beta\,,$$

$$P' \equiv U\,P\,U^{-1} = e^{-\frac{i}{\hbar}\,\alpha\,X}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,\beta\,P}\,P\,e^{\frac{i}{\hbar}\,\beta\,P}\,e^{\frac{i}{\hbar}\,\alpha\,X} = P+\alpha\,.$$

Allora $\alpha = -m\,v$, $\beta = v\,t$ e

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar}\,(-m\,v\,X+v\,t\,P)} = e^{-\frac{i}{\hbar}\,\frac{m\,v^2\,t}{2}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\,m\,v\,X}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,v\,t\,P}\,.$$

32.

(a)

$$\langle\varphi'|\psi'\rangle = \langle\mathcal{P}\varphi|\mathcal{P}\psi\rangle = \int d^3x\,\varphi^*(-\vec{x})\,\psi(-\vec{x})\,\eta_P^2 = \int d^3y\,\varphi^*(\vec{y})\,\psi(\vec{y}) = \langle\varphi|\psi\rangle$$

(b)

$$[\mathcal{P}^2\psi](\vec{x}) = \eta_P\,[\mathcal{P}\psi](-\vec{x}) = \eta_P^2\,\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x})$$

(c) Sfruttando il fatto che $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^\dagger$:

$$[\vec{X}\,'\psi](\vec{x}) = [\mathcal{P}\,\vec{X}\,\mathcal{P}\psi](\vec{x}) = \eta_P[\vec{X}\,\mathcal{P}\psi](-\vec{x}) = -\vec{x}\,\eta_P\,[\mathcal{P}\psi](-\vec{x}) = -\vec{x}\,\psi(\vec{x}) = -[\vec{X}\,\psi](\vec{x})$$

(d)

$$[\vec{P}\,'\psi](\vec{x}) = [\mathcal{P}\,\vec{P}\,\mathcal{P}\psi](\vec{x}) = \eta_P[\vec{P}\,\mathcal{P}\psi](-\vec{x}) = \eta_P(-i\,\hbar\,\vec{\nabla}_{-\vec{x}})[\,\mathcal{P}\psi](-\vec{x}) = -i\,\hbar\,\vec{\nabla}_{-\vec{x}}\psi(\vec{x}) = -[\vec{P}\,\psi](\vec{x})$$

33.

$$|\psi\rangle = \int d^3q\,|\vec{q}|\rangle\langle\vec{q}|\psi\rangle = \int d^3q\,\psi(\vec{q})\,|\vec{q}\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}\,|\psi\rangle = \mathcal{T}\int d^3q\,\psi(\vec{q})\,|\vec{q}\rangle = \int d^3q\,\psi^*(\vec{q})\,\mathcal{T}\,|\vec{q}\rangle$$

Sappiamo inoltre che $\mathcal{T}\,\vec{P}\,\mathcal{T}^{-1} = -\vec{P}$, ovvero $\mathcal{T}\,\vec{P} = -\vec{P}\,\mathcal{T}$, da cui:

$$\vec{P}\,\mathcal{T}\,|\vec{p}\rangle = -\mathcal{T}\,\vec{P}\,|\vec{p}\rangle = -\vec{p}\,\mathcal{T}\,|\vec{p}\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}\,|\vec{p}\rangle = |-\vec{p}\rangle\,,$$

a meno di un fattore di fase. In conclusione:

$$|\psi'\rangle = \mathcal{T}\,|\psi\rangle = \int d^3q\,\psi^*(\vec{q})\,\mathcal{T}\,|\vec{q}\rangle = \int d^3q\,\psi^*(\vec{q})\,|-\vec{q}\rangle = \int d^3q\,\psi^*(-\vec{q})\,|\vec{q}\rangle\,,$$

da cui:

$$\psi'(\vec{p}) = \langle\vec{p}|\psi'\rangle = \psi^*(-\vec{p})$$

34.

(a) Le equazioni del moto classiche sono, nel formalismo Hamiltoniano:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e^2\,\frac{\vec{r}}{r^3}\,, \qquad \vec{p} = \mu\,\frac{d\vec{r}}{dt}\,.$$

(b) Facendo uso delle equazioni del moto derivate al punto precedente:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\vec{p}\cdot(d\vec{p}/dt)}{\mu} + \frac{e^2}{r^3}\,\vec{r}\cdot\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = 0\,,$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\times\vec{p} + \vec{r}\times\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right) = 0\,.$$

Inoltre, ricordando che $d\vec{L}/dt = 0$ ed utilizzando ancora le equazioni del moto:

$$\frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} = -\frac{1}{\mu}\,\vec{L}\times\frac{d\vec{p}}{dt} - e^2\,\frac{d\vec{r}/dt}{r} + e^2\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{r}\right)\frac{\vec{r}}{r^3} = +\frac{e^2}{\mu}\,\frac{\vec{L}\times\vec{r}}{r^3} + e^2\,\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\,\vec{p}}{\mu\,r^3}\,.$$

Sostituendo allora l'espressione esplicita di $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$, otteniamo

$$\frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} = \frac{e^2}{\mu\,r^3}\,\left[(\vec{r}\times\vec{p})\times\vec{r} - r^2\,\vec{p} + (\vec{r}\cdot\vec{p})\,\vec{r}\right] = 0\,,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo ricordato che $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{c}\cdot\vec{a})\,\vec{b} - (\vec{c}\cdot\vec{b})\,\vec{a}$.

(c)

$$\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{l} = \left(\frac{\vec{p}\times\vec{l}}{\mu} - e^2\,\frac{\vec{r}}{r}\right)\cdot\vec{l} = 0\,,$$

dato che $\vec{l}$ è ortogonale sia a $\vec{p}\times\vec{l}$ che a $\vec{r}$.

(d) Con altri semplici passaggi di analisi tri-vettoriale:

$$\vec{\mathcal{M}}^{\,2} = \frac{1}{\mu^2}(\vec{l}\times\vec{p})^2 + \frac{2\,e^2}{\mu\,r}\,(\vec{l}\times\vec{p})\cdot\vec{r} + e^4 = \frac{1}{\mu^2}\,(\vec{l})^2\,(\vec{p})^2 - \frac{2\,e^2}{\mu\,r}\,(\vec{l})^2 + e^4 = \frac{2\,H}{\mu}\,(\vec{l})^2 + e^4\,.$$

35.

(a) Ricordando che in rappresentazione coordinata $P_i = -i\,\hbar\,\partial_i$, si trova

$$\left[P_i, \frac{1}{R}\right] = -i\,\hbar\,\left(\partial_i\,\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\,\partial_i\right) = i\,\hbar\,\frac{X_i}{R^3}\,,$$

$$[M_i, P_j] = -i\,\hbar\,\frac{1}{\mu}\,\left(P_i\,P_j - P^2\,\delta_{ij}\right) - i\,\hbar\,\frac{e^2}{R^3}\left(R^2\,\delta_{ij} - X_i\,X_j\right)\,,$$

$$\left[M_i, \frac{1}{R}\right] = -\frac{i\,\hbar}{2\,\mu}\,\epsilon_{ijk}\,\frac{L_j\,X_k + X_k\,L_j}{R^3}\,.$$

(b)

$$[M_i, M_j] = i\,\hbar\,\epsilon_{ijk}\,L_k\,\frac{-2\,H}{\mu}\,.$$

(c)

$$\vec{M}\cdot\vec{L} = \vec{L}\cdot\vec{M} = -\frac{1}{2\,\mu}\left[\vec{L}\cdot(\vec{L}\times\vec{P}) - \vec{L}\cdot(\vec{P}\times\vec{L})\right] - e^2\,\frac{\vec{L}\cdot\vec{X}}{R}\,.$$

Anche per gli operatori quantistici continua ad essere vero che $\vec{L}\cdot\vec{X} = 0$ (come si può facilmente verificare), per cui solo i primi due termini contribuiscono, proporzionalmente a

$$\epsilon_{ijk}\,L_i\,(L_j\,P_k - P_j\,L_k) = \epsilon_{ijk}(2\,L_i\,L_j\,P_k - i\,\hbar\,\epsilon_{jkl}\,L_i\,P_l)\,,$$

dove abbiamo fatto uso del fatto che $\vec{P}$ e $\vec{X}$ trasformano come vettori per scrivere le componenti di $\vec{P}$ alla destra di quelle di $\vec{L}$. Usando l'algebra dei momenti angolari possiamo osservare che il primo termine è proporzionale a $\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ijl}\,L_l\,P_k \propto \vec{L}\cdot\vec{P} = 0$; il secondo termine si annulla per la medesima ragione, e con questo resta dimostrato quanto richiesto.

(d) Tenendo conto delle relazioni di commutazione tra $\vec{X}$, $\vec{P}$ e $\vec{L}$, con pazienza si ottiene:

$$\vec{\mathcal{M}}^{\,2} = \frac{1}{4\,\mu^2}(\vec{L}\times\vec{P} - \vec{P}\times\vec{L})^2 + e^4 - \frac{e^2}{2\,\mu}\left[(\vec{P}\times\vec{L} - \vec{L}\times\vec{P})\cdot\frac{\vec{X}}{R} + \frac{\vec{X}}{R}\cdot(\vec{P}\times\vec{L} - \vec{L}\times\vec{P})\right]$$

$$= \ldots = \frac{2\,H}{\mu}\,\left[(\vec{L})^2 + \hbar^2\right] + e^4\,.$$

Nel limite $\hbar \to 0$, si ritrova la relazione classica dell'esercizio precedente.