Soluzioni degli esercizi del foglio n.8 – a.a. 2013-4

36.

(a) Da

$$|n_1,\, n_2,\, n_3\rangle = \prod_{j=1}^{3} \frac{(a_j^\dagger)^{n_j}}{\sqrt{n_j\,!}}\, |0,\, 0,\, 0\rangle$$

segue

$$U(W)\,|n_1,\, n_2,\, n_3\rangle = U(W)\, \prod_{j=1}^{3} \frac{(a_j^\dagger)^{n_j}}{\sqrt{n_j\,!}}\, |0,\, 0,\, 0\rangle =$$

$$= \prod_{j=1}^{3} \frac{[U(W)\, a_j^\dagger\, U(W)^{-1}]^{n_j}}{\sqrt{n_j\,!}}\, U(W)\,|0,\, 0,\, 0\rangle = \prod_{j=1}^{3} \frac{[a_k^\dagger\, W_{kj}]^{n_j}}{\sqrt{n_j\,!}}\, |0,\, 0,\, 0\rangle\,.$$

(b) Anche in questo caso sarà sufficiente verificare l'azione sugli operatori di creazione:

$$U(W')\,U(W)\,a_j^\dagger\,U(W)^{-1}\,U(W')^{-1} = U(W')\,a_k^\dagger\,U(W')^{-1}\,W_{kj}$$

$$= a_l^\dagger\,W'_{lk}\,W_{kj} = a_l^\dagger\,(W'\,W)_{lj} = U(W'\,W)\,a_j^\dagger\,U(W'\,W)^{-1}\,.$$

(c)

$$[N\,,\,\Lambda(\lambda)] = \lambda_{ij}\,[N\,,\,a_i^\dagger a_j] = \lambda_{ij}\,\Big([N\,,\,a_i^\dagger]\,a_j + a_i^\dagger\,[N\,,\,a_j]\Big) = \lambda_{ij}\,\Big(a_i^\dagger\,a_j - a_i^\dagger\,a_j\Big) = 0\,,$$

da cui segue immediatamente $[H\,,\,\Lambda(\lambda)] = 0$.

37.

Se r_0 è il tipico raggio d'azione del potenziale, dobbiamo metterci nella situazione in cui $r\,' \leq r_0 \ll r$ [per $r\,' \gg r_0$ il potenziale ridotto $U(\vec{r}\,')$ non contribuisce all'integrale]. Poiché l'angolo tra $\vec{r}-\vec{r}\,'$ e $\vec{r}$ è molto piccolo, possiamo approssimare $\vec{r}-\vec{r}\,'$ con la sua proiezione su $\vec{r}$: $|\vec{r}-\vec{r}\,'| \simeq r - \vec{u}_r\cdot\vec{r}\,'$. Segue allora che, per grande r:

$$G_+(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\,k\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \sim -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\,k\,r}}{r}\,e^{-i\,k\,\vec{u}_r\cdot\vec{r}\,'}\,.$$

Sostituendo nell'equazione integrale otteniamo

$$\phi_k(\vec{r}) = e^{i\,k\,z} + \int d^3r'\,G_+(\vec{r}-\vec{r}\,')\;U(\vec{r}\,')\,\phi_k(\vec{r}\,') = e^{i\,k\,z} - \frac{e^{i\,k\,r}}{4\,\pi\,r}\int d^3r'\,e^{-i\,k\,\vec{u}_r\cdot\vec{r}\,'}\;U(\vec{r}\,')\,\phi_k(\vec{r}\,')\,,$$

che ha il comportamento asintotico desiderato perché l'integrale residuo non dipende piú da r ma soltanto, attraverso il versore $\vec{u}_r$, dagli angoli θ e φ che individuano la direzione del vettore $\vec{r}$. Allora per riprodurre la formula del comportamento asintotico basterà porre

$$f_k(\theta,\varphi) = -\frac{1}{4\,\pi}\int d^3r'\,e^{-i\,k\,\vec{u}_r\cdot\vec{r}\,'}\;U(\vec{r}\,')\,\phi_k(\vec{r}\,')\,.$$

Decomponiamo la funzione di Green incognita in integrale di Fourier. In una delle possibili convenzioni, potremo scrivere:

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3s \; \widetilde{G}(\vec{s}) \; e^{i\,\vec{s}\cdot\vec{r}} \,.$$

Allora, ricordando la decomposizione della delta di Dirac in integrale di Fourier,

$$\delta^3(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3s \; e^{i\,\vec{s}\cdot\vec{r}} \,,$$

otteniamo immediatamente

$$\widetilde{G}(\vec{s}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(k^2 - s^2)} \,,$$

da cui

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3s \, \frac{1}{(k^2 - s^2)} \, e^{i\,\vec{s}\cdot\vec{r}} \,.$$

Dal momento che $\vec{r}$ è fissato, per la variabile di integrazione $\vec{s}$ possiamo scegliere coordinate polari sferiche con l'asse polare diretto come $\vec{r}$. Allora $\vec{s}\cdot\vec{r} = s\,r\,\cos\theta$, l'integrale in φ è banale e vale 2π, l'integrale in θ è

$$\int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \, e^{i\,s\,r\,\cos\theta} = \left[-\frac{e^{i\,s\,r\,\cos\theta}}{i\,s\,r} \right]_0^\pi = \frac{2\,\sin(sr)}{sr} \,.$$

Allora

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \, \frac{2}{r} \int_0^\infty ds \, \frac{s\,\sin(sr)}{(k^2 - s^2)} = \frac{1}{4\pi^2\, r} \int_{-\infty}^\infty ds \, \frac{s\,\sin(sr)}{(k^2 - s^2)} \,.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, torniamo alla notazione esponenziale e fattorizziamo il denominatore:

$$G(\vec{r}) = \frac{i}{8\pi^2\, r} \left[\int_{-\infty}^\infty ds \, \frac{s\, e^{i\,s\,r}}{(s-k)(s+k)} - \int_{-\infty}^\infty ds \, \frac{s\, e^{-i\,s\,r}}{(s-k)(s+k)} \right] \equiv \frac{i}{8\pi^2\, r} (I_1 - I_2) \,.$$

I due integrali si possono valutare con la formula integrale di Cauchy

$$\oint dz \, \frac{f(z)}{(z - z_0)} = (2\pi\, i)\, f(z_0) \,,$$

dove l'integrazione è eseguita su un contorno orientato in senso antiorario e contenente il polo $z = z_0$ (altrimenti l'integrale vale zero). Ricordiamo la prescrizione del testo su come evitare i poli ed il fatto che dobbiamo richiudere i contorni all'infinito in modo tale che il semicerchio all'infinito dia contributo nullo. Nel caso dell'integrale I_1, dobbiamo richiudere il contorno nel semipiano superiore, perché $e^{isr} \to 0$ per $s \to +i\,\infty$. Il contorno racchiude allora il solo polo $s = +k$, e troviamo $I_1 = i\,\pi\, e^{ikr}$. Nel caso dell'integrale I_2, dobbiamo richiudere il contorno nel semipiano inferiore, perché $e^{-isr} \to 0$ per $s \to -i\,\infty$. Il contorno racchiude allora il solo polo $s = -k$ ed è orientato in senso orario, per cui troviamo $I_2 = -i\,\pi\, e^{ikr}$. In conclusione

$$G(\vec{r}) = -\frac{e^{i\,k\,r}}{4\,\pi\, r} \,.$$

39.

Il potenziale $V(r)$ ha simmetria sferica, ma il vettore d'onda incidente $\vec{k}_{inc} = k\,\vec{u}_z$ rompe tale simmetria ad una simmetria cilindrica, per cui nell'espressione dell'ampiezza di scattering non ci sarà dipendenza da φ, ma ci potrà essere dipendenza da θ:

$$f_k^B(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3r_0\, e^{-i\,\vec{K}\cdot\vec{r}_0}\, V(\vec{r}_0)\,.$$

Si noti che abbiamo indicato con $\vec{r}_0$ la variabile tridimensionale di integrazione, per evitare confusione sul significato dell'angolo polare nel passaggio successivo. Per valutare l'integrale converrà infatti passare a coordinate polari, con l'asse polare parallelo e concorde a $\vec{K}$:

$$d^3r_0 = dr_0\, r_0^2\, d\theta_0\, \sin\theta_0\, d\varphi_0\,, \qquad \vec{K}\cdot\vec{r}_0 = K\, r_0\, \cos\theta_0\,.$$

Le integrazioni sulle variabili angolari sono del tutto analoghe a quelle dell'esercizio precedente. Dopo averle eseguite possiamo tornare ad indicare con r la variabile radiale di integrazione ed otteniamo:

$$f_k^B(\theta) = -\frac{2\,\mu}{\hbar^2 K} \int_0^\infty dr\, r\, \sin(K\,r)\, V(r)\,, \qquad (\text{simmetria} \quad \text{sferica})\,.$$

La dipendenza dell'ampiezza di scattering dall'angolo θ, che coincide con l'angolo tra $\vec{k}_{inc} = k\,\vec{u}_z$ e $\vec{k}_{dif} = k\,\vec{u}_r$, è contenuta in

$$K = \left|\vec{k}_{dif} - \vec{k}_{inc}\right| = 2\,k\,\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = 2\,k\,\sin\frac{\theta}{2}\,.$$

40.

(a) Risolvendo l'esercizio precedente abbiamo trovato:

$$f(\theta) = -\frac{2\,\mu}{\hbar^2 K} \int_0^\infty dr\, r\, \sin(K\,r)\, V(r)\,, \qquad \left(K = 2\,k\,\sin\frac{\theta}{2}\right)\,.$$

Sostituendo ora $V(r) = \alpha\ \delta(r-a)$ otteniamo:

$$f(\theta) = -\frac{2\,\mu\,\alpha\,a^2}{\hbar^2}\,\frac{\sin(K\,a)}{K\,a}\,.$$

(b) Per ogni fissato valore di θ, prendere il limite per $ka \to 0$ è lo stesso che prenderlo per $Ka \to 0$. Allora:

$$\widetilde{f}(\theta) \simeq -\frac{2\,\mu\,\alpha\,a^2}{\hbar^2}\,.$$

(c)

$$\widetilde{\sigma}_T = \int d\Omega\, |\widetilde{f}(\theta)|^2 = \frac{16\,\pi\,\mu^2\,\alpha^2\,a^4}{\hbar^4}\,.$$