Soluzioni degli esercizi del foglio n.9 – a.a. 2013-4

41.

(a) Applicando la formula di destra del testo

$$\widetilde{\delta}^{(4)}(k) = \int d^4x\; \delta^{(4)}(x)\, e^{-i\,k\cdot x} = 1$$

da cui, applicando ora la formula di sinistra:

$$\delta^{(4)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\; e^{i\,k\cdot x}$$

(b)

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \int d^4y\, \varphi(y)\, e^{-i\,k\cdot y}\; e^{i\,k\cdot x} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4y\; \varphi(y)\int d^4k\; e^{i\,k\cdot(x-y)} = \int d^4y\; \varphi(y)\, \delta^{(4)}(x-y) = \varphi(x)$$

42.

a)

$$\psi(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\kappa\; a(\vec{\kappa})\; e^{i[\vec{\kappa}\cdot\vec{x} - \epsilon(\vec{\kappa})\,t]}\,, \qquad\qquad \epsilon(\vec{\kappa}) = \frac{\vec{\kappa}^2}{2m}\,.$$

b)

$$a(\vec{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3x\; \psi(\vec{x},0)\; e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{x}}\,.$$

c)

$$0 = \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\psi)} + \partial_t\;\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2\psi^* + i\;\frac{\partial\psi^*}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \left(i\,\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2\right)\psi = 0\,.$$

d)

$$\psi\,' = e^{-i\,\alpha}\,\psi\,,\quad (\psi^*)\,' = e^{i\,\alpha}\,\psi^* \qquad\Rightarrow\qquad \frac{\delta\psi}{\alpha} = -i\,\psi\,,\qquad \frac{\delta\psi^*}{\alpha} = i\,\psi^*\,.$$

Allora, applicando il teorema di Noether:

$$j^0 = \rho = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_t\psi}\frac{\delta\psi}{\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_t\psi^*}\frac{\delta\psi^*}{\alpha} = |\psi|^2\,,$$

$$j^k = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_k\psi}\frac{\delta\psi}{\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_k\psi^*}\frac{\delta\psi^*}{\alpha} = \frac{i}{2m}[(\partial_k\psi^*)\psi - (\partial_k\psi)\psi^*]\,.$$

43.

a)

$$p_1 = \sqrt{E^2 - m^2} \qquad\qquad p_2 = \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2}$$

b) Per calcolare le constanti A_R e A_T dobbiamo imporre la continuità della funzione d'onda e della sua derivata prima nel punto $x = 0$:

$$\psi_I(t, 0) = \psi_{II}(t, 0) \qquad \partial_x \psi_I(t, 0) = \partial_x \psi_{II}(t, 0)$$

da cui

$$1 + A_R = A_T \qquad\qquad (1 - A_R)\ p_1 = A_T\ p_2$$

e infine

$$A_T = \frac{2\ p_1}{p_1 + p_2} \qquad\qquad A_R = \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}$$

c) A prima vista uno si aspetterebbe un comportamento analogo a quello noto nel caso non-relativistico: se $E_k > V_0$ ci sono sia un'onda riflessa che un'onda trasmessa, se $E_k < V_0$ c'è un'onda riflessa, mentre l'onda trasmessa è esponenzialmente soppressa su una scala della lunghezza d'onda Compton entro il gradino di potenziale. Vediamo invece cosa succede nel caso relativistico. Tenendo conto che nel caso dell'equazione di Klein-Gordon non possiamo definire una quadricorrente conservata la cui componente temporale è semidefinita positiva, ci limiteremo a commentare sulla forma della funzione d'onda. La discussione potrebbe essere resa più precisa considerando l'equazione di Dirac, abbiamo scelto di non farlo per semplicità ma chi è interessato può trovare una trattazione sintetica in IZ 2.2.2.

(i) Per $E - V_0 > m$, p_1 e p_2 sono entrambi reali, ci sono un'onda riflessa ed un'onda trasmessa con i coefficienti A_R e A_T trovati in precedenza.

(ii) Se $|E - V_0| < m$, allora p_2 è immaginario puro, ovvero c' è una soppressione esponenziale dell'onda trasmessa.

(iii) Per $E - V_0 < -m$ deve essere, per consistenza, $V_0 > 2m$. Si noti che p_1 e p_2 sono ancora entrambi reali! L'onda incidente è parzialmente riflessa e parzialmente trasmessa, ovvero c' è una probabilità finita non nulla di trovare la particella oltre la barriera, con una energia cinetica negativa $E - m - V_0 < 0$: questa stranezza è il paradosso di Klein. L'origine del paradosso è l'insistenza nell'intepretare l'equazione d'onda relativistica come l'equazione per la funzione d'onda di una particella singola. Quello che succede in realtà in questo caso è che la riflessione della particella incidente da parte del gradino è accompagnata dalla creazione di coppie particella-antiparticella da parte dell'energia del gradino. Infatti, questa situazione è possibile solo se $V_0 > 2m$, la soglia cinematica per la produzione di coppie. Questa creazione di particelle si può anche comprendere osservando che il gradino localizza la particella incidente di massa m su distanze inferiori alla sua lunghezza d'onda Compton $\lambda = 1/m$. Se infatti rimpiazzassimo il gradino con una salita più dolce, dove il potenziale varia da 0 a $V_0 > 2m$ su una scala di distanze $> 1/m$, non troveremmo più lo stesso risultato paradossale, bensì che l'onda trasmessa è esponenzialmente soppressa.

In altre parole, è impossibile evitare la creazione di particelle, in una teoria relativistica, quando si tenta di localizzare una particella di massa m in una regione spaziale più piccola della corrispondente lunghezza d'onda Compton, $\Delta x < 1/m$, in quanto dal principio di indeterminazione segue $\Delta p > m$ e dunque anche $\Delta E > m$.

44.

Applichiamo il metodo della trasformata di Fourier. Una possibile scelta di convenzioni è:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \; F(k) \; e^{i\,k\cdot x} \,.$$

L'equazione di Klein-Gordon per la trasformata di Fourier è:

$$(-k^2 + m^2) \, F(k) = 0 \,.$$

Conviene parametrizzarne la soluzione, nel senso delle distribuzioni, con:

$$F(k) = G(k_0, \vec{k}) \, (2\pi) \, \delta(-k^2 + m^2) \,,$$

dove $G(k_0, \vec{k})$ è una funzione regolare ed il fattore (2π) è convenzionale. Allora:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \; G(k_0, \vec{k}) \; \delta(-k^2 + m^2) \; e^{i\,k\cdot x} \,.$$

Osserviamo che:

$$\delta(-k^2 + m^2) = \delta(-k_0^2 + \omega_{\vec{k}}^2) = \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \left[\delta(k_0 - \omega_{\vec{k}}) + \delta(k_0 + \omega_{\vec{k}}) \right] .$$

Allora, esplicitando il prodotto $k \cdot x$:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \, 2\omega_{\vec{k}}} [G(\omega_{\vec{k}}, \vec{k}) \; e^{i\,\omega_{\vec{k}}\,t - i\,\vec{k}\cdot\vec{x}} + G(-\omega_{\vec{k}}, \vec{k}) \; e^{-i\,\omega_{\vec{k}}\,t - i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}] \,.$$

Effettuando nel secondo addendo il cambiamento di variabile $\vec{k} \to -\vec{k}$, e ponendo $a(\vec{k}) \equiv G(-\omega_{\vec{k}}, -\vec{k})$, $b^*(\vec{k}) \equiv G(\omega_{\vec{k}}, \vec{k})$, arriviamo alla formula scritta a lezione:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \, 2\omega_{\vec{k}}} \left[a(\vec{k}) \; e^{-i\,k\cdot x} + b^*(\vec{k}) \; e^{+i\,k\cdot x} \right]_{k_0 = \omega_{\vec{k}}} \,.$$

La convenzione sulla misura di integrazione nello spazio degli impulsi la rende invariante per trasformazioni del gruppo proprio di Lorentz:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \, 2\omega_{\vec{k}}} \; f(\omega_{\vec{k}}, \vec{k}) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \; [(2\pi) \; \delta(k^2 - m^2) \; \theta(k_0)] \; f(k_0, \vec{k}) \,,$$

dove f è una funzione generica e θ è la funzione a gradino di Heaviside.

45.

(a)

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_1)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_1} = (\Box + m^2)\,\varphi_1\,, \qquad 0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_2)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_2} = (\Box + m^2)\,\varphi_2\,,$$

dunque sia φ_1 che φ_2 soddisfano l'equazione di Klein-Gordon libera per il medesimo valore del parametro di massa m^2.

(b) Basta applicare il teorema di Noether. Per trasformazioni infinitesime $\delta\,\varphi_1 = \alpha\,\varphi_2$ e $\delta\,\varphi_2 = -\alpha\,\varphi_1$, dunque una quadricorrente 'conservata' è data da:

$$j^\mu = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)}\,\frac{\delta\,\varphi_i}{\alpha} = (\partial^\mu\,\varphi_1)\,\varphi_2 - (\partial^\mu\,\varphi_2)\,\varphi_1\,.$$

Ogni quadricorrente che differisca dalla precedente per una costante moltiplicativa non nulla è pure accettabile.