Soluzione dell'esercizio 16

Indicate con $r_1, r_2, s_1, s_2 = 1, 2$ le polarizzazioni degli stati iniziale e finale, nella notazione utilizzata a lezione:

$$\left.\frac{d\sigma_{np}}{d\cos\theta}\right|_{CM} = \frac{1}{32\,\pi\,s}\,\frac{|\vec{q}_1|}{|\vec{p}_1|}\,(2m_e)^2\,(2m_\mu)^2\,\frac{1}{4}\sum_{pol}|\mathcal{M}|^2\,,$$

con

$$\mathcal{M} = \frac{i\,e^2}{s}\,\overline{v}_{r_2}(p_2)\gamma^\mu u_{r_1}(p_1)\,\overline{u}_{s_1}(q_1)\gamma_\mu v_{s_2}(q_2)\,.$$

Allora:

$$(2m_e)^2\,(2m_\mu)^2\,\frac{1}{4}\sum_{pol}|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4\,s^2}\,tr[(\not{q}_1 + m_\mu)\gamma^\mu(\not{q}_2 - m_\mu)\gamma^\nu]\,tr[(\not{p}_2 - m_e)\gamma_\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma_\nu]\,.$$

Nel limite $m_e, m_\mu \ll \sqrt{s}$:

$$(2m_e)^2\,(2m_\mu)^2\,\frac{1}{4}\sum_{pol}|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4\,s^2}\,tr[\not{q}_1\gamma^\mu\not{q}_2\gamma^\nu]\,tr[\not{p}_2\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\nu]$$

$$= \frac{8\,e^4}{s^2}\,[(q_1\cdot p_1)(q_2\cdot p_2) + (q_1\cdot p_2)(q_2\cdot p_1)] = \frac{2\,e^4}{s^2}\,(t^2 + u^2) = e^4(1 + \cos^2\theta)\,.$$

Dalla cinematica nel sistema CM si ottiene poi, sempre nel limite $m_e, m_\mu \ll \sqrt{s}$:

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{q}_1| = |\vec{q}_2| = \frac{\sqrt{s}}{2}\,,$$

da cui, posto come al solito $\alpha = e^2/(4\,\pi)$:

$$\left.\frac{d\sigma_{np}}{d\cos\theta}\right|_{CM} = \frac{\pi\,\alpha^2}{2\,s}\,(1 + \cos^2\theta)$$