Soluzioni dei problemi proposti

1.

$$q = v\ S = costante \quad e \quad S = costante \quad \Rightarrow \quad v = costante$$

$$p + \rho\ g\ z = costante$$

$$p_A + \rho\ g\ z_A = p_B + \rho\ g\ z_B \quad \Rightarrow \quad p_A = p_B + \rho\ g\ (z_B - z_A) = 161504\ Pa\,.$$

$$\rho\ g\ z_C = p_B + \rho\ g\ z_B \quad \Rightarrow \quad z_C = z_B + \frac{p_B}{\rho\ g} = 18\ m\,.$$

2.

$$\rho_c\, d^3\, g - \frac{3}{4}\,\rho_0\, d^3\, g = 0\,, \quad M\, g + \left(\rho_c - \frac{7}{8}\,\rho_0\right)\, d^3\, g = 0\,,$$

$$\Downarrow$$

$$\rho_0 = \frac{8\,M}{d^3} = 1 \times 10^3\ kg\, m^{-3}\,, \quad \rho_c = \frac{3}{4}\ \rho_0 = 0.75 \times 10^3\ kg\, m^{-3}\,.$$

3.

$$vS = v'\,S' \qquad S = \pi R^2 \quad S' = \pi r^2$$

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho (v')^2$$

$$v' = \sqrt{\frac{2(p - p_{atm})}{\rho(1 - r^2/R^2)}} = 10\ ms^{-1}$$

$$t = \frac{Volume}{Portata} = \frac{LR^2}{v_2 r^2} = 39.95\ s$$

4.

$$p_1 + \rho g z_1 = \rho g z_2 \quad \Rightarrow \quad p_1 = \rho g (z_2 - z_1) = 1.47 \times 10^6\ Pa$$

$$q(m^3/s) = \frac{q(m^3/giorno)}{24 \times 60 \times 60} \quad S = \pi (d/2)^2 \quad v = \frac{q}{S} = 0.98\ ms^{-1}$$

5.

Proiettando le forze su un asse verticale diretto verso l'alto:

$$F_{Arch} = \rho_a V g\,, \quad F_{peso} = -\rho V g\,, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3\,, \quad F_{tensione} = -T\,.$$

$$T = (\rho_a - \rho)\ g\ \frac{4}{3}\pi R^3 \simeq 8.21\ N\,;$$

$$(\rho_a - \rho)\ g\ \frac{4}{3}\pi R^3\,(d - d') = \frac{1}{2}\,\rho\ \frac{4}{3}\pi R^3\, v^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2\,g\,(\rho_a-\rho)(d-d')}{\rho}} \simeq 2.21\,ms^{-1}\,.$$

Alternativamente, si possono usare le leggi del moto uniformemente accelerato.

6.

(a) Dal teorema di Bernoulli si ricava $\rho\,g\,(L+h) = \frac{1}{2}\,\rho v^2$, da cui

$$v = \sqrt{2\,g\,(L+h)} = \sqrt{2\,(9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}})(45\ \mathrm{m})} = 29.7\ \mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

(b) Combinando $q = v\,S$, $S = \pi\,r^2$ e $V = q\,t$ si ottiene

$$V = (29.7\ \mathrm{m\,s^{-1}})(\pi\,10^{-4}\ \mathrm{m^2})(10\ \mathrm{s}) = 0.0933\ \mathrm{m^3} = 93.3\ \mathrm{l}\,.$$

7.

(a) Scrivendo le componenti delle forze lungo un asse verticale orientato verso l'alto, la forza peso del pallone è $F_p = -\rho_E\,g\,V$, la spinta idrostatica è $F_a = \rho_A\,g\,V$, la forza dovuta al peso della parte di corda sollevata da terra è $F_c = -x\,M\,g$, dove $V = (4/3)\,\pi\,R^3$ è il volume del pallone. La condizione di equilibrio è dunque $(\rho_A - \rho_E)\,g\,V = M\,g\,x$, da cui:

$$x = \frac{(\rho_A - \rho_E)\,V}{M} = \frac{[(1.3 - 0.18)\,\mathrm{kg\,m^{-3}}][(4/3)\,\pi(0.4\,\mathrm{m})^3]}{0.5\,\mathrm{kg}} = 0.6\,.$$

(b) Una volta staccato il filo, il pallone è soggetto ad un'accelerazione costante $a = [(\rho_A - \rho_E)/\rho_E]\,g = 61\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Se parte da fermo in $z_0 = 0$, la legge del moto è $z = (1/2)\,a\,t^2$, per cui il tempo impiegato per salire di Δ è:

$$t = \sqrt{\frac{2\,\Delta}{a}} = \sqrt{\frac{2\,(1.22\,\mathrm{m})}{61\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = \sqrt{0.04}\,\mathrm{s} = 0.2\,\mathrm{s}\,.$$

8.

(a) Da $p = \rho\, g\, h$ seguono $p_1 = \rho\, g\, h_1$ e $p_2 = \rho\, g\, h_2$, da cui:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\rho\, g\, h_1}{\rho\, g\, h_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{3} = 0.667$$

(b) Da $p(h) = \rho\, g\, h$, $dS = W\ dh$ e $dF = p(h)\ dS = W\ p(h)\ dh$ segue

$$F = \int_0^H dh\ W\, \rho\, g\, h = W\, \rho\, g \int_0^H dh\ h = \frac{1}{2} W\, \rho\, g\, H^2$$

$$= \frac{(120\,\mathrm{m})(1 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}})\ (9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}})(50\,\mathrm{m})^2}{2} = 1.470 \times 10^9\ \mathrm{N}$$

(c)

$$\overline{p} = \frac{F}{S} = \frac{F}{H\, W} = \frac{1.470 \times 10^9\ \mathrm{N}}{(50\,\mathrm{m})(120\,\mathrm{m})} = 2.45 \times 10^5\ \mathrm{N\,m^{-2}}$$

Alternativamente:

$$\overline{p} = \frac{1}{H} \int_0^H dh\, p(h) = \frac{1}{2}\, \rho\, g\, H = 2.45 \times 10^5\ \mathrm{N\,m^{-2}}$$

Essendo la pressione $p(h) = \rho\, g\, h$ una funzione lineare della profondità, va bene anche:

$$\overline{p} = \frac{p(H) + p(0)}{2} = \frac{1}{2}\, \rho\, g\, H = 2.45 \times 10^5\ \mathrm{N\,m^{-2}}$$

9.

(a) Dalla condizione di equilibrio, proiettata sull'asse verticale rivolto verso il basso:

$$F_{eq} = F_{peso} + F_{idr,eq} = M\, g - \rho_a\, S\, \frac{h}{2}\, g = 0\,,$$

segue, ricordando che $S = 10\,\mathrm{cm}^2 = 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$:

$$h = \frac{2\, M}{\rho_a\, S} = 0.2\,\mathrm{m}$$

(b) Ricordando la risposta alla domanda precedente, e proiettando sempre sull'asse verticale diretto verso il basso:

$$F(x^*) = F_{peso} + F_{idr}(x^*) = M\, g - \rho_a\, S\, \left(\frac{h}{2} + x^*\right)\, g = -\rho_a\, S\, g\, x^* = -0.049\,\mathrm{N}$$

(c) Analogamente:

$$F(x) = F_{peso} + F_{idr}(x) = -\rho_a\, S\, g\; x$$

(d) Riconosciamo in $F(x)$ una forza elastica di costante elastica $k = \rho_a\, S\, g$. L'equazione del moto è allora

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F(x)}{M} = -\frac{k}{M}\,x\,,$$

ovvero l'equazione di un moto armonico con

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{\rho_a\, S\, g}{M}} = 10\,\mathrm{s}^{-1}$$

Poichè la condizione iniziale è $x(0) = x^*$ ed inizialmente il corpo si muove verso l'alto, la legge del moto sarà:

$$x(t) = x^* \cos(\omega\, t)$$

(e) Il primo annullarsi di $x(t)$ avviene per $\omega t = \pi/2$, da cui

$$t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{20}\,\mathrm{s} = 0.157\,\mathrm{s}$$

10.

Dopo l'uscita dal foro orrizzontale, il fluido è in caduta libera, con velocità iniziale v_0 diretta orizzontalmente. Dalle formule del moto uniformemente accelerato si ricava allora

$$v_0 = d\sqrt{\frac{g}{2h_0}} = 7.67\ \mathrm{ms}^{-1}\,.$$

Applicando il teorema di Bernoulli, e sfruttando la grandezza del serbatoio per assegnare velocità nulla alla superficie libera del fluido, si ottiene

$$h_1 = h_0 + \frac{v_0^2}{2g} = 6\ \mathrm{m}\,.$$

La portata volumetrica attraverso il foro è $q = v_0\, A$, dunque nel tempo $t = 30$ s il volume di liquido che fuoriesce è

$$V = v_0\ A\ t = 4.6 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3 = 4.6\ \mathrm{l}\,.$$

11.

$$q = \frac{V}{T} = 8.33 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$S_r = \pi\,(d/2)^2 = \pi \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \qquad v_r = \frac{q}{S_r} = 2.65\,\mathrm{m\,s}^{-1}$$

$$S_c = \pi\, R^2 = 2.83 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2 \qquad v_c = \frac{q}{S_c} = 0.295\,\mathrm{m\,s}^{-1}$$

$$p_c = p_0 + \frac{1}{2}\,\rho\,(v_r^2 - v_c^2) + \rho\, g\, h = 1.23 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$$