**Soluzioni dei problemi proposti**

**1.**

$$M_z = \frac{dL_z}{dt}\,, \quad L_z = I_z\;\omega\,, \quad M_z = I_z\;\alpha\,, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}\,,$$

$$I_z = \frac{\mu\; d^2}{3} = \frac{32}{3}\,kg\,m^2 = 10.667\,kg\,m^2\,, \quad M_z = F\;d = 14.4\;N\,m\,,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3\;F}{\mu\;d} = 1.35\;(rad)\,s^{-2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{3\;F\;t}{\mu\;d} = 0.54\;(rad)\,s^{-1}$$

$$E_k = \frac{1}{2}\;I_z\;\omega^2 = \frac{3\;F^2\;t^2}{2\;\mu} = 1.5552\;J\,, \qquad W = E_k$$

**2.**

(a) Il moto è una pura rotazione attorno ad un asse fisso passante per il centro di massa, dunque

$$\vec{P} = 0\,.$$

Da $L = I_z\,\omega_0$ e da $I_z = (1/2)\,M\,R^2 = (1/2)(5\text{ kg})(0.3\text{ m})^2 = 0.225\text{ kg}\,\text{m}^2$ segue

$$L = (0.225\text{ kg}\,\text{m}^2)(80\text{ s}^{-1}) = 18\text{ kg}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1}\,,$$

con $\vec{L}$ parallelo all'asse di rotazione e di verso opportuno. L'energia cinetica totale è

$$E_k = (1/2)\,I_z\,\omega_0^2 = (1/2)(0.225\text{ kg}\,\text{m}^2)(80\text{ s}^{-1})^2 = 720\text{ J}\,.$$

(b) Da $\omega = \omega_0 + \alpha\,t$ segue $|\alpha| = \omega_0/t^* = (80\text{ rad}\,\text{s}^{-1})/(100\text{ s}) = 0.8\text{ rad}\,\text{s}^{-2}$. Da $|M_z| = I_z\,|\alpha| = F\,R$ segue poi

$$F = (I_z\,|\alpha|)/R = [(0.225\text{ kg}\,\text{m}^2)(0.8\text{ rad}\,\text{s}^{-2})/(0.3\text{ m}) = 0.6\text{ N}\,.$$

**3.**

$$m_1 = m_2 = \frac{M}{2} = 1.125\;kg\,, \quad E_1 = E_2 = \frac{E_k}{2} = 900\;J\,,$$

$$|v_1| = |v_2| = \sqrt{\frac{2E_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{2E_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{2E_k}{M}} = 40\;m\,s^{-1}\,, \quad v_{CM} = 0\,.$$

$$t = \sqrt{\frac{2\,h}{g}} = 1\;s\,.$$

**4.**

$$mv = (M+m)V \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{m}{m+M} v = 2\ ms^{-1}$$

$$-\Delta E = E_{kin} - E'_{kin} = \frac{1}{2}\frac{mM}{M+m} v^2 = 156\ J$$

$$\vec{F}_a = -m\ g\ \mu\ \vec{u}_v \quad \Rightarrow \quad V(t) = V - g\ \mu\ t \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{V}{g\ \mu} \simeq 1.36\ s$$

**5.**

(a)

$$I = \frac{1}{2}\ M\ R^2 = \frac{1}{2}\ (2\,\mathrm{kg})\ (0.6\,\mathrm{m})^2 = 0.36\ \mathrm{kg\,m^2}$$

(b)

$$\omega = 100\ \frac{giri}{minuto} = \frac{100 \times 2\,\pi}{60} \frac{(rad)}{s} = 10.5\ (\mathrm{rad})\ \mathrm{s^{-1}}$$

$$\omega' = 50\ \frac{giri}{minuto} = \frac{50 \times 2\,\pi}{60} \frac{(rad)}{s} = 5.24\ (\mathrm{rad})\ \mathrm{s^{-1}}$$

$$|\Delta E| = \frac{1}{2}\ I\ |\omega^2 - (\omega')^2| = \frac{1}{2}\ (0.36\ \mathrm{kg\,m^2}) \left|(10.5)^2 - (5.24)^2\right| \mathrm{s^{-2}} = 14.8\ \mathrm{J}$$

(c)

$$I' = I + M\,R^2 = \frac{3}{2}\ M\ R^2 = 3 \times 0.36\ \mathrm{kg\,m^2} = 1.08\ \mathrm{kg\,m^2}$$

**6.**

(a)

$$r_1(t) = v_1\ t\,, \qquad r_2(t) = r_2(0) + v_2\ t$$

(b)

$$t^* = \frac{r_2(0)}{v_1 - v_2} = 0.2\ \mathrm{s}$$

(c) Posto $P = p_1 + p_2$ e $M = m_1 + m_2$:

$$v_{CM} = \frac{P}{M} = \frac{m_1\,v_1 + m_2\,v_2}{m_1 + m_2} = 5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

(d) Dalla conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2} m_1\,v_1^2 + \frac{1}{2} m_2\,v_2^2 = \frac{1}{2} M\,v_{CM}^2 + \frac{1}{2} k\,(\Delta x)^2$$

da cui, ricordando che $k = 10\,\mathrm{N\,cm^{-1}} = 1000\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ :

$$\Delta x = +\sqrt{\frac{m_1\,m_2\,(v_1 - v_2)^2}{k\,(m_1 + m_2)}} = 0.26\ \mathrm{m}$$

**7.**

Il corpo si muove di moto rotatorio attorno al perno, sotto l'azione della forza peso e di quella esercitata dal perno, che però non compie lavoro. Applicando la conservazione dell'energia meccanica:

$$E_p(i) = M\,g\,\frac{L}{2} \qquad E_p(f) = 0 \qquad E_k(i) = 0 \qquad E_k(f) = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2 \qquad I = \frac{M\,L^2}{3}$$

$$E_k(f) = E_p(i) - E_p(f) + E_k(i) = M\,g\,\frac{L}{2} = 44.1\ \text{J}$$

L'estremo libero si muove di moto circolare lungo una circonferenza di raggio $L$, con velocità $v = L\,\omega$ ed accelerazione centripeta $a_N = v^2/L$. Dunque:

$$v = \sqrt{3\,g\,L} = 6.64\ \text{m}\,\text{s}^{-1} \qquad\qquad a_N = 3\,g = 29.4\ \text{m}\,\text{s}^{-2}$$

**8.**

La massa della sfera di legno e la velocità del sistema subito dopo l'urto (anelastico) sono:

$$M = \rho\,\frac{4}{3}\pi R^3 = 0.543\ \text{kg}\,, \qquad V_x = \frac{m v_x}{M+m} = -5.33\ \text{ms}^{-1}\,.$$

Dopo l'urto il sistema si muove di moto armonico. Applicando la conservazione dell'energia meccanica, e tenendo presente che agli estremi delle oscillazioni la velocità è nulla, si trova:

$$x_{max} = \sqrt{\frac{(M+m)V_x^2}{k}} = 0.23\ \text{m}\,.$$

Frequenza angolare e periodo delle oscillazioni sono rispettivamente:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = 23\ (\text{rad})\,\text{s}^{-1}\,, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.272\ \text{s}\,.$$

Il siatema ripassa per la prima volta in $x = 0$ dopo mezzo periodo, dunque al tempo

$$t^* = \frac{T}{2} = 0.136\ \text{s}\,.$$

Essendo l'energia meccanica conservata nel moto successivo all'urto, l'energia cinetica in $x = 0$ varrà sempre:

$$E_k^* = \frac{1}{2}(M+m)V_x^2 = 7.99\ \text{J}\,.$$

## 9.

$$(a) \qquad v'_A = 0 \qquad v'_B = v_A = v_0 = 6 \text{ m/s}\,.$$

$$(b) \qquad \Delta x_{max} = \sqrt{\frac{M}{k}} v_0 = 1.2 \text{ m}\,.$$

$$(c) \qquad \Delta t = \frac{T}{2}\,, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}\,, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \pi \sqrt{\frac{M}{k}} \simeq 0.63 \text{ s}\,.$$

## 10.

$$(a) \qquad I = \frac{md^2}{3} = 0.48\,\mathrm{kg\,m^2}\,, \quad M = F\,d = 0.9\,N\,m\,, \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{M}{I} = 1.88\,(\mathrm{rad})\,\mathrm{s}^{-2}\,.$$

$$(b) \qquad \theta = 2\pi\, n \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{2\theta\,\alpha} = 15.3\,(\mathrm{rad})\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

$$(c) \qquad a_N = \omega^2\,\frac{d}{2} \simeq 70\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,, \quad a_T = \alpha\,\frac{d}{2} = 0.56\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,, \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2} \simeq 70\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,.$$